高级算法/ 2026 年秋季

线性规划与优化专题

线性规划基础

建模、几何与整数多胞体

第1 讲：100 分钟

本讲义仅覆盖栗师老师负责的线性规划专题。本专题共九讲，每讲100 分钟，讲次编号与课件一致。第一、第二部分是本讲内部的阅读划分；选读附录供课后拓展。

授课教师：栗师
南京大学

以授课教师的课件为依据，借助AI 将讲解、证明和课后练习展开为文字。中英文版本的数学内容相互对应。

学习目标与阅读路线

本单元建立整个优化专题所使用的语言。第一部分把离散选择写成线性约束；第二部分解释可行域的几何结构如何决定线性规划能给出精确的组合算法，还是只能给出松弛。

1. 把带权集合选择问题写成整数规划及其线性松弛。
2. 区分可行解、最优解与最优值。
3. 利用紧约束刻画顶点，并处理低维可行域。
4. 解释整数性如何使松弛成为精确表述。

请先读第一部分，再读第二部分。算法概览用于建立背景，本单元不展开单纯形换基规则或内点法分析。练习安排在课后完成。凡涉及算法运行时间，均假设输入系数为有理数。

目录

1 第一部分：建模与线性表述 **1**

1.1 把离散对象表示成向量 1
1.2 本讲义采用的线性规划形式 1
1.3 一个完整的二变量例子 1
1.4 可行域与线性规划的作用 2

2 第二部分：多面体几何与整数性 **2**

2.1 凸性、维数与面 2
2.2 顶点与紧约束 3
2.3 整数多胞体与精确表述 3
2.4 描述规模与算法 4

3 课后独立练习 **4**

1 第一部分：建模与线性表述

1.1 把离散对象表示成向量

典型的组合优化问题给定基集$[n]=\{1,\dots,n\}$、可行集合族$\mathcal{S}\subseteq 2^{[n]}$ 和权重w_i，要求在可行集合中最大化或最小化$\sum_{i\in S} w_i$。集合族不必显式列出，例如一张图就隐式规定了其中的全部匹配。

定义1.1 (示性向量)**.** 对$S\subseteq[n]$，示性向量$\chi^S\in\{0,1\}^n$ 满足：当且仅当$i\in S$ 时，$\chi^S_i=1$。

目标函数变成线性函数$w^\top x$。建模的任务是找到一组约束，使其0–1 解恰好对应可行对象。最短路、生成树、匹配、独立集和背包解都可以这样表示，但相应松弛的算法价值很不相同。

例1.2 (匹配的初步表述)**.** 对无自环图$G=(V,E)$，令x_e 表示是否选择边e。任何两条被选边不能共用端点，因此最大权匹配可写成

$$\max \sum_{e\in E} w_e x_e \quad \text{约束为} \quad \sum_{e\in\delta(v)} x_e \le 1 \ (v\in V), \qquad x_e\in\{0,1\}.$$

把$x_e\in\{0,1\}$ 替换为$x_e\ge 0$ 就得到线性松弛，度约束已经隐含$x_e\le 1$。该LP 是否存在整数最优解，是由图的结构决定的问题。第二单元将回答二分图的情形，并解释一般图中的障碍。

松弛能保证什么

松弛扩大了可行域。因此，对最小化问题，松弛最优值是原问题的下界；对最大化问题则是上界。分数可行向量通常不是合法的离散解，必须进一步证明整数性，或者设计舍入算法并分析其损失。

1.2 本讲义采用的线性规划形式

线性规划是在有限个线性等式与不等式构成的可行域上优化线性目标。我们采用以下最小化形式:

$$\min c^\top x \quad \text{约束为} \quad Ax\ge b, \quad x\ge 0, \tag{1.1}$$

其中$A\in\mathbb{R}^{m\times n}$、$b\in\mathbb{R}^m$、$c\in\mathbb{R}^n$。向量不等式按坐标解释，第$i$ 条约束为$\sum_j a_{ij}x_j\ge b_i$。这里n 是变量数，m 是所列矩阵约束的行数，不包括非负约束。不同教材对“标准形式”的约定可能不同，关键是实际的符号方向。

原有形式	转换方法
$a^\top x\le\beta$	$-a^\top x\ge-\beta$
$a^\top x=\beta$	$a^\top x\ge\beta$ 以及$-a^\top x\ge-\beta$
$z\in\mathbb{R}$	$z=z^+-z^-$, $z^+,z^-\ge 0$
$\max c^\top x$	$-\min(-c^\top x)$ （就最优值而言）

这些转换保留了恢复原可行解和目标值所需的信息。自由变量需要用两个非负变量之差表示，直接要求其非负会改变问题；同样，把最大化转换为最小化后，报告最优值时必须恢复符号。

1.3 一个完整的二变量例子

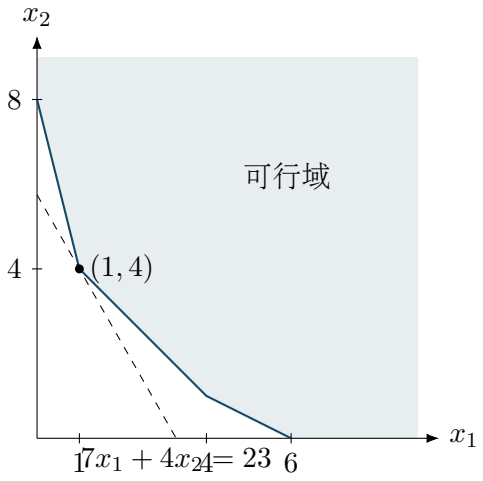
考虑课件中贯穿使用的例子:

$$\begin{aligned} \min \quad & 7x_1+4x_2 \\ \text{约束为} \quad & x_1+x_2\ge 5, \\ & x_1+2x_2\ge 6, \\ & 4x_1+x_2\ge 8, \\ & x_1,x_2\ge 0. \end{aligned} \tag{1.2}$$

点$(1,4)$ 可行，目标值为23。仅有可行性还不能证明最优。为了得到相同的下界，把第一条约束乘以3，再加上第三条约束：

$$7x_1 + 4x_2 = 3(x_1 + x_2) + (4x_1 + x_2) \geq 3 \cdot 5 + 8 = 23.$$

所有可行解的目标值都至少为23，而$(1,4)$ 达到这个下界，因此它是最优解。乘子$(3,0,1)$ 是对偶证书的一个初步例子，第三单元会系统展开。注意第二条约束在该最优解处并不取等号。



阴影区域向上方和右方无限延伸。它是无界的，但最小值有限。这个区别非常重要：可行域无界，并不意味着目标函数在优化方向上无界。

1.4 可行域与线性规划的作用

定义1.3. 多面体是有限个闭半空间的交。有界多面体称为多胞体。线性规划的可行域是多面体，只有在有界时才是多胞体。

最小化LP 有三种需要区分的情形：不可行、存在有限且可达到的最优值、目标无下界。常用约定是$\inf \varnothing = +\infty$，而目标无下界时下确界为$-\infty$。可行LP 若下确界有限，则能达到该值；这是多面体的性质，对任意非闭可行集合并不成立。线性规划广泛用于运输、路由、调度、资源分配和设施选址。它可以直接给出精确算法，也可以作为整数规划方法中的下界子程序，或作为近似算法的起点。它的价值不仅在于求解器返回数值，还在于表述本身能够揭示结构并提供可核验的证书。

2 第二部分：多面体几何与整数性

2.1 凸性、维数与面

定义2.1. 点$v^1, \ldots, v^k$ 的凸组合是形如$\sum_i \lambda_i v^i$ 的向量，其中$\lambda_i \geq 0$ 且$\sum_i \lambda_i = 1$。这些点的凸包记为$\mathrm{conv}\{v^1, \ldots, v^k\}$，即所有这类凸组合构成的集合。

每个多面体都是凸的：两个向量若满足$a^\top x \leq b$，它们连线上的每个点也满足该式。其仿射维数是包含它的最小仿射子空间的维数。对于$\mathbb{R}^n$ 中的非空多面体，若在整个集合上恒成立的独立等式组的秩为r，则其维数为$n - r$。这里按等式法向量的秩计数，而不是按写出的等式条数计数。

若$a^\top x \leq \beta$ 对P 上所有点都成立，并且存在取等号的点，则$F = \{x \in P : a^\top x = \beta\}$ 是一个面。维数为$\dim(P) - 1$ 的真面称为面片，零维面称为顶点。嵌入$\mathbb{R}^3$ 的三角形的边就是它的面片，因为三角形的维数为2 而非3。

2.2 顶点与紧约束

定义2.2. 若$x \in P$ 不能表示为不同的$u, v \in P$ 的非平凡凸组合$x = \lambda u + (1-\lambda)v$（$0 < \lambda < 1$），则称$x$ 为极点或顶点。在x 处取等号的约束称为紧约束。

定理2.3 (顶点判据)**.** 设$P = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \le b\}$，其中等式用一对不等式表示。可行点$x$ 是顶点，当且仅当其紧约束的法向量张成$\mathbb{R}^n$；等价地，存在n 个独立的紧约束唯一确定x。

证明. 若紧约束法向量的秩小于n，可选非零向量d 与它们全部正交。所有非紧约束均有正的松弛量，且约束只有有限条，因此存在足够小的$\varepsilon > 0$，使$x + \varepsilon d$ 和$x - \varepsilon d$ 都可行。x 是这两个不同点的中点，所以不是顶点。

反之，设n 个独立紧约束组成$Bx = b'$，且$x = \lambda u + (1-\lambda)v$，其中$u, v$ 可行。若一个不等式在非平凡凸组合处取等号，则它在两个端点处都必须取等号，否则凸组合处将有正松弛量。因此$Bu = Bv = b'$。由B 非奇异，得到$u = v = x$。 □

这个判据也适用于退化顶点：紧约束可能超过n 条，但只需要其中n 条独立即可。在低维多胞体中，定义仿射包的等式也对环境空间中的秩作出贡献。

定理2.4 (多胞体是其顶点的凸包)**.** 非空多胞体的顶点个数有限，且该多胞体等于其顶点的凸包。因此，每个线性目标都存在一个顶点最优解。

证明. 顶点判据中n 个独立紧约束的选法有限，每种选法至多确定一个顶点。对任意非顶点x，如上选择与其紧约束正交的方向。由于有界性，这条直线上的可行部分是一个有界闭区间，其两个端点u, v 可以凸组合得到x。每个端点都新增了一个与原有紧约束独立的紧约束：原法向量张成空间中的约束无法限制沿该方向的移动。在非顶点端点上重复这一过程，每条分支的紧约束秩都严格增加，至多增加n 次后就终止，得到顶点的凸组合。最后，线性函数在凸组合处的值就是各点函数值的相同凸组合，因此至少有一个顶点不劣于该凸组合。 □

注2.5. 上述凸包结论中的有界性不可省略。无界多面体可以包含射线，而仿射直线甚至没有顶点。另外，当最优面不止一个点时，LP 求解器可能返回非顶点最优解。顶点的整数性并不意味着任意求解器返回的每个最优解都是整数解。

2.3 整数多胞体与精确表述

对可行集合族$\mathcal{S}$，定义其组合多胞体

$$P_{\mathcal{S}} = \operatorname{conv}\{\chi^S : S \in \mathcal{S}\}.$$

在该多胞体上优化任意线性函数，与在原离散对象上优化具有完全相同的最优值。困难在于如何有效描述这个凸包。匹配多胞体、生成树多胞体和旅行商多胞体都属于这一构造，但它们的描述复杂度与算法后果大不相同。

定义2.6. 若一个多胞体的全部顶点都属于$\mathbb{Z}^n$，则称其为整数多胞体。对于包含于$[0,1]^n$ 的多胞体，这等价于所有顶点均为0–1 向量。

定理2.7 (由整数性推出精确性)**.** 设多胞体$Q \subseteq [0,1]^n$ 满足$Q \cap \{0,1\}^n = \{\chi^S : S \in \mathcal{S}\}$。若$Q$ 是整数多胞体，则$Q = P_{\mathcal{S}}$。

证明. 每个可行示性向量都属于Q，故由凸性有$P_{\mathcal{S}} \subseteq Q$。反之，$Q$ 的每个顶点都是0–1 点，因此是某个可行集合的示性向量。又因为Q 是其顶点的凸包，得到$Q \subseteq P_{\mathcal{S}}$。 □

证明整数点恰好对应合法对象，通常是建模中较容易的部分；证明没有额外的分数顶点，往往才是核心定理。下一单元将介绍两种方法：对分数点作正反向扰动，以及利用全幺模矩阵的行列式。

2.4 描述规模与算法

总可以用全部支撑不等式形式化地描述凸包：

$$w^\top x \le \max_{S\in\mathcal{S}} w^\top \chi^S \qquad \text{对任意} w\in\mathbb{R}^n.$$

但这还不是算法，因为计算右端就是原优化问题。必须区分规模为多项式的显式表述，以及规模虽为指数、却配有高效分离判定器的表述。第四单元研究分离，第八单元研究增加变量能否缩小表述规模。

方法	几何思想	复杂度视角
单纯形法	在相邻基或顶点之间移动。	常见换基规则有指数级最坏情形；需处理退化。
椭球法	利用分离不断缩小外包椭球。	在通常的有理编码假设下具有多项式位复杂度。
内点法	沿受控的内部点序列前进。	存在多项式时间算法，且有良好的实际表现。

“多项式时间”允许依赖系数的二进制编码长度。强多项式时间进一步要求算术运算次数仅由组合维度的多项式控制，同时中间数的编码长度保持多项式有界。这个区别解释了课件为何单独提出强多项式LP 问题。后续将把LP 可解性作为工具，同时明确规模和精度假设。

3 课后独立练习

1. 把$\max(2u-v)$，约束为$u+v=3$、$u-2v\le 4$、$u\in\mathbb{R}$、$v\ge 0$，转换为形式 (1.1)，并说明如何恢复原最优值。
2. 列出 (1.2) 的所有顶点，写出各点的紧约束和目标值。哪些边界直线交点不可行?
3. 分别给出具有无穷多个最优解的有界LP，以及可行域无界但具有唯一有限最优解的LP。
4. 对线段$\{(t,t,0):0\le t\le 1\}\subseteq\mathbb{R}^3$，求其维数、顶点及每个顶点处的独立紧约束。
5. 在边权均为1 的三角形上，比较匹配整数规划的最优值与每条边取$x_e=1/2$ 时的目标值。这说明该松弛具有怎样的整数性?
6. 设Q 为整数多胞体，而求解器返回分数最优点。解释为何仍存在整数最优解，并说明如何在最优面上依次优化坐标来选出一个顶点。

来源与阅读说明

主要依据：授课教师的课件文件夹

`1.LPFoundations`

`Topics.tex`.

选读部分对应课件中的选讲内容（如有）。补充的例子和练习服务于课后阅读，不占用新的授课讲次。

课程网站. 网站上前段课程的讲义用于参考组织方式与展开程度，本专题的内容仍以线性规划课件为准。