高级算法/ 2026 年秋季

线性规划与优化专题

整数性与精确算法

匹配多胞体与全幺模性

第2 讲：100 分钟

本讲义仅覆盖栗师老师负责的线性规划专题。本专题共九讲，每讲100 分钟，讲次编号与课件一致。第一、第二部分是本讲内部的阅读划分；选读附录供课后拓展。

授课教师：栗师
南京大学

以授课教师的课件为依据，借助AI 将讲解、证明和课后练习展开为文字。中英文版本的数学内容相互对应。

学习目标与阅读路线

只有能够恢复最优离散对象时，LP 松弛才能给出精确算法。本单元用两种互补方法证明整数性：二分匹配的几何扰动论证，以及全幺模矩阵的行列式论证。

1. 证明二分匹配松弛中的每个分数点都不是顶点。
2. 解释一般图匹配为什么需要奇集约束。
3. 证明全幺模性蕴含整数性的定理，并用于网络流和区间调度。

第一、第二部分是主线内容。一般图完美匹配的证明及拟阵部分为选读，对应课件附录。它们进一步展示同一原则：分数点无法拥有足够多的独立紧约束来成为顶点。对任意边集或元素集F，记$x(F) = \sum_{e \in F} x_e$。

目录

1 第一部分：匹配多胞体 **1**
1.1 二分匹配多胞体定理 1
1.2 一般图为什么需要更多约束 1

2 第二部分：全幺模性 **2**
2.1 整数性的行列式证书 2
2.2 闭包性质与稀疏矩阵引理 2
2.3 连续的1 与区间调度 2

3 课后独立练习 **3**

A 选读：一般图完美匹配 **3**

B 选读：拟阵及其多胞体 **4**
B.1 独立性、秩与基本运算 4
B.2 秩不等式多胞体 4
B.3 基、生成树与拟阵交 5

1 第一部分：匹配多胞体

1.1 二分匹配多胞体定理

设$G=(L\uplus R,E)$ 为有限二分图。匹配是任意两条边不共用端点的边集。最大权匹配的自然松弛为

$$\max \sum_{e\in E} w_e x_e \quad \text{约束为} \quad x(\delta(v))\le 1\ (v\in L\cup R),\qquad x_e\ge 0\ (e\in E).$$

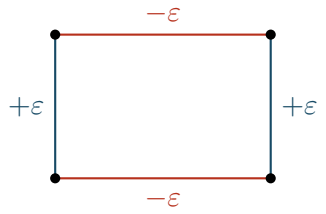
每条边都有端点，因此度约束隐含$x_e\le 1$，可行域有界。它的0–1 点恰好是匹配的示性向量，剩下的任务就是排除分数顶点。

定理1.1. 二分匹配多胞体满足

$$\operatorname{conv}\{\chi^M : M \text{ 是匹配}\} = \{x\ge 0 : x(\delta(v))\le 1，\text{对所有}v\}.$$

证明. 取分数可行向量x，令H 为满足$0<x_e<1$ 的边构成的子图。若H 含环，则二分性保证该环为偶环。沿环交替赋予$+1,-1,+1,-1,\dots$，其他边赋0，得到非零方向d。每个环上顶点处的两项变化相互抵消。取足够小的$\varepsilon>0$，则$x+\varepsilon d$ 与$x-\varepsilon d$ 都保持非负，且所有度和不变，因此x 不是顶点。

若H 为森林，取一个含边连通分量中两个叶子之间的路径，再沿路径交替赋号。内部顶点的度和不变。在端点处，恰有一条关联边是分数边，且不可能存在值为1 的关联边，否则与那条正分数边相加会超过1；其余关联边的值因而都为0，端点度和严格小于1。取ε 小于两端松弛量以及维持路径上非负性所需的正值，则正反两个扰动均可行。两种情形都将x 表示成不同可行点的中点，所以所有顶点均为整数点。由第一单元的整数性判据即得结论。 □



每个顶点处的变化相消。
将所有符号反转得到另一个点。

这一整数性证明与边权无关，因此也适用于任意边权。问题陈述中的正权假设只是方便条件，并非整数性所必需。算法上，求解LP 并选取一个最优顶点，坐标为1 的边就是所求匹配。

1.2 一般图为什么需要更多约束

在三角形上，每条边赋值1/2 满足所有度约束，单位边权下总值为3/2，而任何匹配的大小至多为1。交替赋号的扰动无法在奇环上首尾一致。对任何奇数大小的顶点集S，匹配在S 内部至多使用$(|S|-1)/2$ 条边。记内部边集为$E[S]$。主课件中的下述定理说明，这些必要约束也足以描述匹配凸包。

定理1.2 (一般图匹配多胞体)**.**

$$\operatorname{conv}\{\chi^M : M \text{ 是}G\text{ 中的匹配}\} = \left\{ x\ge 0 : \begin{array}{l} x(\delta(v))\le 1 \quad (v\in V),\\ x(E[S])\le (|S|-1)/2 \quad (|S|\text{ 为奇数}) \end{array} \right\}.$$

奇集个数可能为指数级，因此该定理本身并未给出规模为多项式的显式LP。描述规模、分离和优化是不同的问题，将在第四及第八单元再次讨论。

对完美匹配，每个顶点都被匹配。度约束变成等式，奇集约束可以改写成以下特别有用的形式：

$$x_e\ge 0,\qquad x(\delta(v))=1\ (v\in V),\qquad x(\delta(S))\ge 1\ (|S|\text{ 为奇数}). \tag{1.1}$$

事实上，在S 中对度等式求和可得$|S|=2x(E[S])+x(\delta(S))$。奇割约束表达一个奇偶性事实：奇数个顶点无法全部在内部配对。完美匹配示性向量的凸包恰好由 (1.1) 描述，后文给出选读证明。

2 第二部分：全幺模性

2.1 整数性的行列式证书

定义2.1. 若矩阵的每个方形子矩阵的行列式都属于$\{-1,0,1\}$，则称其全幺模（TU，课件记为TUM）。定义包括1×1 子矩阵，因此每个元素本身都属于$\{-1,0,1\}$。

定理2.2. 若A 全幺模且b 为整数向量，则$\{x : Ax \ge b,\ x \ge 0\}$ 的每个顶点均为整数点。特别地，若该区域有界，则它是整数多胞体。

证明. 取一个顶点，先固定其零坐标。剩余正坐标由一组独立紧约束唯一确定。在这些坐标上选取非奇异方形子矩阵B，得到$Bx' = b'$。全幺模性给出$\det B = \pm 1$。由克拉默法则，

$$x'_j = \frac{\det B_j}{\det B} \in \mathbb{Z},$$

其中B_j 是把第j 列替换为整数向量b' 后的矩阵。它的行列式为整数，但不必等于± 1。补回零坐标即可得证。 □

右端项必须为整数：矩阵(1) 全幺模，但等式$x = 1/2$ 的解是分数。全幺模性是一个充分的结构条件，并非某个特定多胞体整数性的必要条件。

2.2 闭包性质与稀疏矩阵引理

转置、交换行列，以及将任意行或列乘以-1 都保持全幺模性。添加单位行或单位列也保持全幺模性，这可由沿该行或列展开行列式得到。因此可以加入上界、非负约束，或将等式拆成两条反向不等式，而不破坏相应的TU 结构。

引理2.3. 若一个$\{0,\pm 1\}^{m\times n}$ 矩阵的每行至多含一个$+1$ 和一个-1，则该矩阵及其转置都全幺模。

证明. 对任意方形子矩阵B 按阶数归纳。若有零行，行列式为0；若有一行只含一个非零元，沿该行展开后，行列式等于较小子矩阵行列式或其相反数。否则每行恰有一个$+1$ 和一个-1，于是$B\mathbf{1} = 0$，矩阵奇异。所有情形均得到行列式为0 或± 1。转置不改变相应方形子矩阵的行列式。 □

有向图的顶点–弧关联矩阵每列恰有一个$+1$ 和一个-1，因此全幺模。结合整数容量界，流守恒等式定义的多胞体具有整数顶点。这从LP 几何证明了整数最大流的存在，而不依赖增广路算法。

对二分图，从无符号顶点–边关联矩阵出发，把属于R 的行乘以-1。每个边对应的列便出现一正一负，所以矩阵全幺模。由定理 2.2 得到定理 1.1 的第二个证明。三角形的无符号关联矩阵行列式绝对值为2，明确展示该论证在非二分图中失效的位置。

2.3 连续的1 与区间调度

引理2.4. 每行中的1 连续出现的0–1 矩阵全幺模；每列中的1 连续出现时也成立。

证明. 任意方形子矩阵B 的每行仍具有连续的1。把列变为$B_1, B_2 - B_1, \dots, B_k - B_{k-1}$，其中作差使用原矩阵的列。这相当于右乘一个行列式为1 的上双对角矩阵。每段连续的1 变成一个$+1$ 和至多一个-1，由引理 2.3 可知$\det B \in \{0,\pm 1\}$。转置即得列版本。 □

带权区间调度中，活动j 占据半开区间$[s_j, f_j)$，其中$f_j > s_j$，权重为$w_j > 0$。令$\mathcal{T}$ 为排好序的不同开始时刻，LP 为

$$\max \sum_j w_j x_j \quad \text{约束为} \quad \sum_{j : t\in[s_j,f_j)} x_j \le 1 \ (t \in \mathcal{T}), \qquad x_j \ge 0.$$

只检查开始时刻就足够：对任意存在活动的时刻t，取这些活动中最晚的开始时刻$s \le t$。在t 活跃的活动在s 也都活跃，因此利用非负性，它们的总量由s 处约束控制。每列中的1 连续出现，右端项均为整数；每项活动出现在其自身开始时刻的约束中，所以可行域有界且整数。最优顶点就对应最优调度。半开区间约定很重要：在t 结束的活动可以与在t 开始的活动相邻安排。LP 证明补充了熟悉的动态规划方法，也说明时间上的顺序结构如何转化为矩阵的整数性性质。

3 课后独立练习

1. 在匹配证明的森林情形中，用路径边的分数值和端点松弛量给出ε 的一个显式正上界。
2. 计算三角形无符号关联矩阵的行列式，写出缺少的奇集约束，并说明其排除了每条边取$1/2$ 的向量。
3. 严格证明添加单位行保持全幺模性，并据此处理网络流弧上的整数下界和上界。
4. 对区间$[0,2),[1,4),[2,4)$ 和权重$4,7,5$ 写出调度LP，求最优调度及对应最优顶点。
5. 说明为什么去掉符号条件后，“每行至多两个非零元”并不蕴含全幺模性。
6. 选做：补全下文收缩紧奇集后，奇割约束仍成立的奇偶性论证。

A 选读：一般图完美匹配

这里展开课件附录中的收缩证明。允许平行边，收缩产生的自环删去。记 (1.1) 的多胞体为$Q(G)$。若$|V|$ 为奇数，$S = V$ 对应的约束使可行域为空，符合不存在完美匹配的事实。以下设$|V|$ 为偶数。

选取$|V| + |E|$ 最小的反例及其分数顶点x。值为零的边可以删除；若$x_e = 1$，它的两个端点的其他关联边均为零，可以删去该匹配顶点对，由最小性分解剩余向量，再把e 加回。这些操作都会将x 表示为完美匹配的凸组合，产生矛盾。因此可假设每条边都满足$0 < x_e < 1$。

此时支撑图中每个顶点的度至少为2。若度全部为2，图由环组成。奇环连通分量违反其自身的奇割约束，剩余分量只能是偶环。每个偶环上的可行向量都可直接表示为该环两种交替完美匹配的凸组合；对各分量取乘积分布即可分解整个向量。因此x 不能是分数顶点。

否则$|E| > |V|$。顶点需要$|E|$ 个独立紧等式，而度等式至多贡献$|V|$ 个；又因为没有紧的非负约束，必然存在非平凡紧奇割S，满足$3 \le |S| \le |V| - 3$ 和$x(\delta(S)) = 1$。在一张图中收缩S，在另一张图中收缩其补集。未收缩顶点的度和仍为1，新顶点的度和也为1。收缩图中的奇集若不含超级顶点，直接对应原图奇集；若包含它，则用被收缩的奇数顶点集替换该点，得到的集合仍为奇集。因此两边的诱导向量均满足相应系统。

由最小性，两边向量都能分解为完美匹配的凸组合。每个匹配恰好使用一条割边。设两边分解权重分别为λ_a 和μ_b。固定割边e，两边使用e 的匹配总权重均为x_e。将任意两个这样的匹配按权重$\lambda_a \mu_b / x_e$ 配对，并沿e 拼接，即得到原图的完美匹配。配对后的权重在两边都保持正确的边际分布，从而恢复全部原始边坐标；总权重为$\sum_{e \in \delta(S)} x_e = 1$。这给出了$x$ 的凸分解，与其为分数顶点矛盾。

为什么需要按割边耦合

若在两张收缩图中独立抽取匹配，选中的割边可能不同，因而无法拼接。先按共同割边条件化，既保留两边的边际分布，又保证每次拼接都可行。

B 选读：拟阵及其多胞体

B.1 独立性、秩与基本运算

定义B.1. 拟阵是二元组$\mathcal{M} = (E, \mathcal{I})$，满足$\varnothing \in \mathcal{I}$、$\mathcal{I}$ 对取子集封闭，以及增广性质：若$I, J \in \mathcal{I}$且$|I| < |J|$，则存在$e \in J \setminus I$ 使$I \cup \{e\} \in \mathcal{I}$。

$\mathcal{I}$ 的成员称为独立集；极大独立集称为基，极小相关集称为回路。增广性质保证所有基的大小相同。在图拟阵中，独立集是森林，连通图的基是生成树，回路是图中的环；矩阵列向量的线性无关性给出线性拟阵；划分拟阵则限制一个划分的每个部分中最多可选的元素数。

定义$r(S) = \max\{|I| : I \subseteq S,\ I \in \mathcal{I}\}$。反复加入任意一个仍保持独立的元素，就能得到大小为$r(S)$的集合；否则增广性质会与其极大性矛盾。秩函数在空集上为零，加入一个元素时只增加0 或1，并且具有次模性：

$$r(A) + r(B) \geq r(A \cup B) + r(A \cap B). \tag{B.1}$$

一个直接证明如下：先取$A \cap B$ 的基，将其扩充为A 的基，再扩充为$A \cup B$ 的基。最后一步新加入的元素都属于$B \setminus A$，它们与最初$A \cap B$ 的基一起构成B 的独立子集。因此$r(A \cap B) + r(A \cup B) - r(A) \leq r(B)$，即 (B.1)。

反之，满足空集归一化、单元素增量为0 或1、以及次模性的集合函数，必为某拟阵的秩函数。定义独立集为满足$r(I) = |I|$ 的集合。由于删除一个元素至多使秩下降一，取子集仍保持该等式。若独立集满足$|I| < |J|$，则$r(I \cup J) > r(I)$。如果$J \setminus I$ 中没有单个元素能增大秩，那么边际收益递减会使全部加入后也不能增大秩，产生矛盾，故满足增广性质。同理，在S 内扩充到极大独立集后，其大小必等于$r(S)$。

运算	含义
$\mathcal{M} \setminus e$	删除e，保留不含e 的独立集。
$\mathcal{M}/e$	对非自环元素e，I 独立当且仅当原来的$I \cup \{e\}$ 独立；秩为$r_{/e}(S) = r(S \cup \{e\}) - 1$。
$\mathcal{M}[S]$	把基集限制在S 上。
$\mathcal{M}^*$	对偶拟阵的基为原拟阵各个基的补集；拟阵对偶与LP 对偶是不同概念。

B.2 秩不等式多胞体

定理B.2 (拟阵独立集多胞体)**.**

$$\operatorname{conv}\{\chi^I : I \in \mathcal{I}\} = Q := \{x \geq 0 : x(S) \leq r(S),\ \text{对任意} S \subseteq E\}.$$

单元素约束给出$x_e \leq 1$，因此Q 有界，其0–1 点恰好对应独立集。下面展开课件中的紧集链证明，明确其中的秩论证。

证明. 假设存在基集最小的反例及其分数顶点x。坐标$x_e = 0$ 时可归约为删除；坐标$x_e = 1$ 时可归约为收缩非自环元素e，因为$S \cup \{e\}$ 上的约束变成$x(S) \leq r(S \cup \{e\}) - 1$。反过来，收缩后的约束也蕴含不含$e$ 的约束，因为$r(S \cup \{e\}) - 1 \leq r(S)$。较小拟阵的多胞体是整数的，故这两种情形都不可能产生分数顶点。于是可设所有e 都满足$0 < x_e < 1$。

若$x(S) = r(S)$，称S 为紧集。若A, B 都是紧集，则

$$x(A) + x(B) = r(A) + r(B) \geq r(A \cup B) + r(A \cap B) \geq x(A \cup B) + x(A \cap B).$$

由集合求和的容斥恒等式，首尾两式相等，故所有不等式均取等号，$A \cup B$ 与$A \cap B$ 也是紧集。

取一条由非空紧集组成的最长严格包含链$\mathcal{C}$。断言链中集合的示性向量张成全部紧集的示性向量。否则，选取不在此张成空间中的紧集B，使其与链中集合互不包含的个数最少。若该个数为零，

则可把B 插入链中，与最长性矛盾。否则选一个与B 互不包含的$T \in \mathcal{C}$。$B \cap T$ 与$B \cup T$ 都紧，且各自的冲突数都更少：位于T 下方的链元素与$B \cup T$ 可比，位于T 上方的链元素与$B \cap T$ 可比，两种操作都不会产生新冲突。由最小性，它们的示性向量都在链张成空间内。然而

$$\chi^B = \chi^{B\cup T} + \chi^{B\cap T} - \chi^T,$$

与B 的选择矛盾。

在所有坐标严格介于0 和1 之间的顶点处，紧秩约束必须张成$\mathbb{R}^E$。因此该链必须有$|E|$ 个非空成员；这样的严格链每步恰好增加一个元素，并终止于E。相邻紧等式相减后，每个坐标都等于两个整数秩之差，所以全部坐标为整数，与$0 < x_e < 1$ 矛盾，定理得证。 □

B.3 基、生成树与拟阵交

添加$x(E) = r(E)$ 即选出由基的凸组合构成的面；它是面，但未必是面片。对于连通图，图拟阵秩为$r(F) = |V| - \mathrm{cc}(V, F)$，其中孤立顶点也计作连通分量。其基多胞体为

$$x \geq 0, \quad x(E) = |V| - 1, \quad x(E[S]) \leq |S| - 1 \qquad (\varnothing \neq S \subseteq V).$$

对于任意边集F，在(V, F) 的各连通分量顶点集上求和这些约束，再利用非负性与$F \cap E[S] \subseteq E[S]$，就能恢复其秩约束。这说明生成树只需考虑顶点子集。

定理B.3 (拟阵交；不证明)**.** 对同一基集上的两个拟阵，

$$P_{\mathcal{M}_1} \cap P_{\mathcal{M}_2} = \mathrm{conv}\{\chi^I : I \in \mathcal{I}_1 \cap \mathcal{I}_2\}.$$

若进一步要求公共独立集是其中一个拟阵的基，则相当于再与该拟阵的基多胞体所在面取交。

这是一个特殊的结构定理：任意两个整数多胞体的交未必整数。二分匹配是两个划分拟阵的公共独立集，一个按左侧顶点的关联边划分，另一个按右侧顶点划分。以r 为根的有向生成树，则是底层无向图拟阵的一个基，同时在限制$v \neq r$ 入度至多为一、r 入度为零的划分拟阵中独立。满足这些入度条件的生成树，从r 到每个顶点都有有向路径。这些应用说明不同组合限制如何结合而不丧失整数性。

来源与阅读说明

主要依据：授课教师的课件文件夹

`2.Integrality`

`Topics.tex` 与`Optional.tex`.

选读部分对应课件中的选讲内容（如有）。补充的例子和练习服务于课后阅读，不占用新的授课讲次。

课程网站. 网站上前段课程的讲义用于参考组织方式与展开程度，本专题的内容仍以线性规划课件为准。