高级算法/ 2026 年秋季

线性规划与优化专题

线性规划对偶

最优性证书、择一定理与互补松弛

第3 讲：100 分钟

本讲义仅覆盖栗师老师负责的线性规划专题。本专题共九讲，每讲100 分钟，讲次编号与课件一致。第一、第二部分是本讲内部的阅读划分；选读附录供课后拓展。

授课教师：栗师
南京大学

以授课教师的课件为依据，借助AI 将讲解、证明和课后练习展开为文字。中英文版本的数学内容相互对应。

学习目标与阅读路线

可行解说明能够做到什么，对偶解则证明任何可行解都不可能突破怎样的界。本单元从证书角度建立对偶，证明有限LP 最优值总有最优对偶证书，并刻画弱对偶不等式何时全部取等号。

1. 通过约束的加权和推导对偶，包括等式和自由变量情形。
2. 证明弱对偶与Farkas 择一定理。
3. 理解强对偶的ε-证书证明，并说明最优值为何能够达到。
4. 利用互补松弛验证或恢复最优解。

第一部分构造对偶并解释证书意义，第二部分证明强对偶与互补松弛。末尾的几何附录补充证明中使用的闭锥与最优值可达性事实。

目录

1 第一部分：构造对偶规划 **1**
1.1 从下界到优化问题 . . . 1
1.2 弱对偶与最优性证书 . . . 1
1.3 符号、等式与自由变量 . . . 1

2 第二部分：强对偶与互补松弛 **2**
2.1 择一定理 . . . 2
2.2 用任意精度证书证明强对偶 . . . 2
2.3 可行性与无界性 . . . 3
2.4 互补松弛 . . . 3

3 课后独立练习 **4**

A 证明中使用的几何细节 **4**
A.1 有限生成锥为什么是闭的 . . . 4
A.2 构造分离向量 . . . 4
A.3 有限最优值为什么能达到 . . . 4

1 第一部分：构造对偶规划

1.1 从下界到优化问题

回到第一单元的LP。可行点$(1,4)$ 的目标值为23，但我们还需要对所有可行点都成立的下界。约束的非负组合可以提供这种下界。例如乘子$(2,1,0)$、$(1,1,1)$ 和$(4,0,0)$ 分别给出下界16、19和20，而$(3,0,1)$ 给出23。这些乘子为什么合法?

对$y_1, y_2, y_3 \geq 0$，将三条约束加权求和可得

$$(y_1 + y_2 + 4y_3)x_1 + (y_1 + 2y_2 + y_3)x_2 \geq 5y_1 + 6y_2 + 8y_3.$$

若左侧两个系数分别不超过7 和4，则由$x \geq 0$，左式不超过$7x_1 + 4x_2$。因此以这种方式能得到的最强下界本身就是一个LP：

$$\begin{aligned} \max \quad & 5y_1 + 6y_2 + 8y_3 \\ \text{约束为} \quad & y_1 + y_2 + 4y_3 \leq 7, \\ & y_1 + 2y_2 + y_3 \leq 4, \\ & y_1, y_2, y_3 \geq 0. \end{aligned} \tag{1.1}$$

原LP 称为原始规划，这个最大化下界的LP 称为对偶规划。一个原始变量对应一条对偶约束，一条原始约束对应一个对偶变量；原始右端项b 成为对偶目标系数，原始目标系数c 成为对偶右端项。

1.2 弱对偶与最优性证书

$$\begin{array}{ll} (P) \quad \min c^\top x & (D) \quad \max b^\top y \\ \quad Ax \geq b,\ x \geq 0 & \quad A^\top y \leq c,\ y \geq 0. \end{array} \tag{1.2}$$

定理1.1 (弱对偶)**.** 对每个原始可行解x 和对偶可行解y，都有$b^\top y \leq c^\top x$。

证明.

$$b^\top y \leq (Ax)^\top y = x^\top A^\top y \leq x^\top c.$$

第一个不等式使用$Ax \geq b$ 和$y \geq 0$，第二个使用$A^\top y \leq c$ 和$x \geq 0$。两步都不能忽略符号条件。 □

推论1.2. 若可行的x, y 满足$c^\top x = b^\top y$，则二者都最优。更一般地，它们的目标差可以控制各自距离最优值的误差。

若共同最优值为V，由$b^\top y \leq V \leq c^\top x$ 可得$c^\top x - V \leq c^\top x - b^\top y$。这在优化算法尚未结束时也有用，可以把中间可行解变成数值证书。在近似算法中，对偶可行目标值还是整数最小化问题最优值的下界。

例1.3. 贯穿例子中，$x = (1,4)$ 与$y = (3,0,1)$ 均可行，目标值都为23。核验这两个向量就构成完整的最优性证明，不必知道它们是如何求出来的。

1.3 符号、等式与自由变量

对于最小化原始问题，规则始终是构造下界。$\geq$ 约束配非负乘子，$\leq$ 约束配非正乘子，等式配自由乘子。在变量一侧，$c - A^\top y$ 必须具有适当符号，以保证$x^\top(c - A^\top y) \geq 0$。

原始形式（最小化）	对偶要求
$a_i^\top x \geq b_i$	$y_i \geq 0$
$a_i^\top x \leq b_i$	$y_i \leq 0$
$a_i^\top x = b_i$	$y_i \in \mathbb{R}$
$x_j \geq 0$	$(A^\top y)_j \leq c_j$
$x_j \leq 0$	$(A^\top y)_j \geq c_j$
$x_j \in \mathbb{R}$	$(A^\top y)_j = c_j$

也可以先全部转换成标准形式，但符号表避免了不必要的变量和约束翻倍。对最大化原始问题，可以直接构造上界，或先把目标取负，再应用最小化约定。混用不同约定的规则，是对偶推导中常见的错误来源。

例1.4 (等式与自由变量)**.** 对$\min 2x + z$，约束为$x + z = 3$、$x \geq 0$、$z \in \mathbb{R}$，等式乘子y 为自由变量；x 列要求$y \leq 2$，z 列要求$y = 1$。因此对偶为在这两条约束下最大化$3y$，最优值为3；原始解$x = 0, z = 3$ 达到该值。

2 第二部分：强对偶与互补松弛

2.1 择一定理

定理2.1 (Farkas 引理)**.** 以下两个系统恰有一个可行：

$$Ax = b,\ x \geq 0; \qquad A^\top y \geq 0,\ b^\top y < 0,\ y \in \mathbb{R}^m.$$

证明. 两者不可能同时可行，否则$b^\top y = x^\top A^\top y \geq 0$ 与$b^\top y < 0$ 矛盾。若b 不可行，考虑有限生成的闭凸锥$K = \{Ax : x \geq 0\}$，把$b \notin K$ 与K 分离。由于$0 \in K$ 且K 对非负缩放封闭，可以选取分离泛函，使所有$u \in K$ 满足$y^\top u \geq 0$，同时$y^\top b < 0$。将其应用于A 的每一列便得$A^\top y \geq 0$。附录补充几何细节。 □

推论2.2 (不等式形式)**.** 系统$Ax \leq b,\ x \geq 0$ 不可行，当且仅当存在$y \geq 0$，使$A^\top y \geq 0$ 且$b^\top y < 0$。

证明. 引入松弛变量$s \geq 0$，写成$Ax + s = b$。对矩阵$[A\ I]$ 应用定理 2.1，其中单位矩阵的列恰好要求$y \geq 0$。 □

Farkas 证书是不可行性的简洁理由。它并非仅表示搜索失败，而是给出一个线性组合，使任何声称可行的解都会导致矛盾。

2.2 用任意精度证书证明强对偶

定理2.3 (强对偶)**.** 若 (1.2) 中的原始问题可行且具有有限最优值P，则对偶达到某个最优值D，且$D = P$。

证明. 任取$\varepsilon > 0$。不存在非负x 同时满足$Ax \geq b$ 和$c^\top x \leq P - \varepsilon$。对下列系统应用推论 2.2：

$$\begin{pmatrix} -A \\ c^\top \end{pmatrix} x \leq \begin{pmatrix} -b \\ P - \varepsilon \end{pmatrix}, \qquad x \geq 0.$$

得到$y \geq 0$ 和$\alpha \geq 0$，满足

$$-A^\top y + \alpha c \geq 0, \qquad -b^\top y + \alpha(P - \varepsilon) < 0. \tag{2.1}$$

除以α 前必须证明其为正。若$\alpha = 0$，则$A^\top y \le 0$ 且$b^\top y > 0$；但对任意原始可行解x_0，有$b^\top y \le x_0^\top A^\top y \le 0$，矛盾。因此$\alpha > 0$。令$\widehat{y} = y/\alpha$，由 (2.1) 得

$$\widehat{y} \ge 0, \qquad A^\top \widehat{y} \le c, \qquad b^\top \widehat{y} > P - \varepsilon.$$

对每个$\varepsilon > 0$，都有一个对偶可行值大于$P - \varepsilon$，而弱对偶又把所有这些值限制在P 以下，所以对偶上确界等于P。最后，线性函数在非空多面体上的有限上确界能够达到（见附录），因此存在对偶最优向量。最后这一步不可省略：只证明上确界等于P，尚不能直接得到最优对偶解。 □

2.3 可行性与无界性

经过等价的符号转换后，对偶的对偶就是原始问题。弱对偶和强对偶给出以下完整关系：

- 若一边具有有限最优值，则两边均有最优解，且值相等。
- 若原始目标无下界，则对偶不可行；若对偶目标无上界，则原始不可行。
- 若一边不可行，另一边可能不可行，也可能无界；不可行并不强迫另一边无界。

例如$A = (0)$、$b = (1)$、$c = (-1)$，原始约束为$0x \ge 1$，对偶约束为$0y \le -1$，两边都不可行。这个例子排除了一个常见的过强说法。

2.4 互补松弛

对可行对(x, y)，把目标差展开为非负项之和：

$$c^\top x - b^\top y = \sum_j x_j (c_j - (A^\top y)_j) + \sum_i y_i ((Ax)_i - b_i). \tag{2.2}$$

定理2.4 (互补松弛)**.** 可行对(x, y) 最优，当且仅当

$$x_j (c_j - (A^\top y)_j) = 0 \quad \forall j, \qquad y_i ((Ax)_i - b_i) = 0 \quad \forall i.$$

证明. 最优性与强对偶使 (2.2) 等于零。由于每项非负，每项都必须为零。反之，所有乘积为零就得到目标值相等，再由弱对偶证得最优性。 □

因此，对偶变量为正会迫使对应原始约束取等号，原始变量为正会迫使对应对偶约束取等号。反向命题不成立：紧约束的乘子可以为零。互补松弛必须与可行性共同使用，只有乘积为零并不能证明最优。

例2.5 (恢复数值证书)**.** 在$x = (1, 4)$ 处，第二条原始约束有正松弛量，故$y_2 = 0$。两个原始坐标均为正，因此两条对偶约束都取等号。联立$y_1 + 4y_3 = 7$ 与$y_1 + y_3 = 4$ 得到$y_3 = 1$、$y_1 = 3$。反过来，这两个正乘子迫使$x_1 + x_2 = 5$ 和$4x_1 + x_2 = 8$，从而恢复$(1, 4)$。

对偶乘子还可量化敏感性。固定A, c，把右端项由b 改为b' 时，原来在b 处的最优乘子y^* 仍对偶可行。若新原始问题具有有限最优值$V(b')$，则

$$V(b') \ge b'^\top y^* = V(b) + (b' - b)^\top y^*.$$

这是严格的线性支撑下界。要取等号，还需要最优基或最优面的额外稳定性，不能自动假定。

3 课后独立练习

1. 推导$\min(3x_1+2x_2)$，约束为$x_1+x_2\ge 4$、$x_1-x_2=1$、$x\ge 0$ 的对偶，并求一对原始–对偶最优解。
2. 为系统$x_1+x_2\le -1$、$x_1,x_2\ge 0$ 的不可行性给出Farkas 证书。
3. 构造例子说明：紧原始约束的最优乘子可以为零，零原始变量也可以对应紧对偶约束。
4. 在强对偶证明中，指出原始可行性被使用的确切步骤。删去此条件后哪一步失效?
5. 对 (1.2) 从代数上验证对偶的对偶等于原始问题，明确写出每次符号转换。
6. 若原始可行解成本为10.2、对偶可行值为10，能推出什么加性保证? 在什么正性假设下可推出乘性保证?

A 证明中使用的几何细节

A.1 有限生成锥为什么是闭的

$K=\{Ax : x\ge 0\}$ 中每个向量都可用A 的一组线性无关列作非负组合表示。若当前正支撑列相关，则在该支撑上取非零线性关系$Ad=0$，适当改符号使某个$d_i>0$，从系数向量中减去θd，直到某个正坐标首次变为零。非负性保持且支撑缩小，重复即可。

对K 中任意收敛序列，由于独立列集合的选法有限，可取一个使用相同列集合的子序列。设列矩阵为B，则系数向量等于$(B^\top B)^{-1}B^\top z_k$，并收敛到非负向量，所以极限仍在$K$ 中。这证明了闭性。

A.2 构造分离向量

令z 为闭凸锥K 中距离$b\notin K$ 最近的点；把搜索限制在足够大的闭球内即可保证最近点存在。令$y=z-b$。沿z 到任意$u\in K$ 的线段考察距离的极小性，可得$y^\top(u-z)\ge 0$。分别取$u=0$与$u=2z$，得到$y^\top z=0$。于是所有$u\in K$ 满足$y^\top u\ge 0$，而$y^\top b=-\|z-b\|^2<0$，这正是Farkas 证书。

A.3 有限最优值为什么能达到

多面体在线性映射下的像仍为多面体。可引入像坐标的等式，再用Fourier–Motzkin 消元证明：消去一个变量时，将其各个上界和下界两两组合，产生有限个相容性不等式。因此可行多面体在$y\mapsto b^\top y$ 下的像是一维多面体，即闭区间、闭射线、单点或整条直线。若该像非空且上确界有限，则该端点属于像集。这就在不假设对偶可行域有界的前提下证明了最优值可达。

来源与阅读说明

主要依据：授课教师的课件文件夹

`3.Duality`

`Topics.tex`.

选读部分对应课件中的选讲内容（如有）。补充的例子和练习服务于课后阅读，不占用新的授课讲次。

课程网站. 网站上前段课程的讲义用于参考组织方式与展开程度，本专题的内容仍以线性规划课件为准。