高级算法/ 2026 年秋季

线性规划与优化专题

线性规划舍入

顶点覆盖与无关机调度

第4 讲：100 分钟

本讲义仅覆盖栗师老师负责的线性规划专题。本专题共八讲，讲次编号与课件一致。第一、第二部分是本讲内部的阅读划分；选读附录供课后拓展。

授课教师：栗师
南京大学

以授课教师的课件为依据，借助AI 将讲解、证明和课后练习展开为文字。中英文版本的数学内容相互对应。

学习目标与阅读路线

LP 即使不具整数性，仍然可以发挥作用。分数最优解提供比较基准，舍入算法则在控制成本增加的同时，将其变为合法离散解。本单元对比逐坐标阈值舍入与通过匹配实现的协同舍入。

1. 写出近似保证的完整证明链，正确理解整数性间隙。

2. 证明带权顶点覆盖的二倍舍入定理。

3. 构造调度槽位、寻找覆盖所有作业的匹配，并证明$2T$ 负载界。

第一、第二部分为主线内容。附录利用课程前段的集中界工具，介绍拥塞问题的独立随机舍入。所有最小化成本和处理时间都假设非负。

目录

1 第一部分：LP 舍入与顶点覆盖 1

1.1 比较基准与证明链 1

1.2 带权顶点覆盖 1

1.3 紧的LP 比较界 1

2 第二部分：无关机调度 2

2.1 猜测完工时间上界 2

2.2 把机器拆成槽位 2

2.3 把后面的作业计入前一个槽位 2

2.4 得到多项式时间二近似算法 3

3 课后独立练习 3

A 选读：拥塞最小化 3

A.1 分数路由与稀疏路径分布 3

A.2 独立舍入与联合界 4

A.3 两个有用的补充 4

1 第一部分：LP 舍入与顶点覆盖

1.1 比较基准与证明链

对最小化问题，记整数最优值为OPT，包含全部可行整数解的松弛最优值为LP。若x^* 为分数最优解，而舍入返回可行离散解S，成本至多为$\alpha c^\top x^*$，则

$$\mathrm{cost}(S) \le \alpha c^\top x^* = \alpha \mathrm{LP} \le \alpha\,\mathrm{OPT}\,. \tag{1.1}$$

这里有两个独立任务：舍入对象必须可行，其成本必须可控。如果仍有边未被覆盖或作业未被安排，逐坐标成本不等式就没有意义；反过来，仅有可行舍入而没有成本分析，也不是近似定理。

定义1.1 (整数性间隙)**.** 对LP 最优值为正的实例，间隙为OPT /LP；一种松弛的最坏间隙是所有实例中该比值的上确界。最优值为零的情形必须另行处理，不能直接除以零。

若某实例的间隙为g，则任何可行整数解的成本都不小于gLP。因此当$\alpha < g$ 时，不可能有$\mathrm{cost}(S) \le \alpha\mathrm{LP}$ 的保证。这限制的是相对于该LP 下界的证明方法，本身并不证明使用更强松弛或其他基准无法取得更好的近似。

1.2 带权顶点覆盖

对无向图$G = (V, E)$ 与非负顶点权重w_v，顶点覆盖S 必须包含每条边的至少一个端点。自然松弛为

$$\min \sum_{v\in V} w_v x_v \quad \text{约束为} \quad x_u + x_v \ge 1 \ (uv \in E), \qquad 0 \le x_v \le 1.$$

上界可以省略而不改变最优值：把大于1 的非负坐标截断到1，仍保持全部覆盖约束，且不会增加非负目标。保留上界则使松弛显式有界。

顶点覆盖的阈值舍入

求解LP 得到x^*，返回$S = \{v : x^*_v \ge 1/2\}$。

定理1.2. 返回集合是顶点覆盖，且权重至多为$2\mathrm{LP} \le 2\,\mathrm{OPT}$。

证明. 若某条边的两个端点都未选中，则其坐标都小于$1/2$，与$x^*_u + x^*_v \ge 1$ 矛盾。对成本，每个被选顶点满足$1 \le 2x^*_v$，故

$$\sum_{v\in S} w_v \le 2\sum_{v\in S} w_v x^*_v \le 2\sum_{v\in V} w_v x^*_v = 2\mathrm{LP}.$$

权重非负保证把求和范围扩大到全部顶点时不等式方向正确。 □

阈值必须包含等号。对单条边上的$x_u = x_v = 1/2$，若只选严格大于$1/2$ 的坐标就会返回空集。按这两个概率独立作伯努利舍入，也有$1/4$ 的概率不可行，因此只保持期望目标值并不够。

1.3 紧的LP 比较界

对单位权完全图K_n（$n \ge 2$），整数覆盖至少有$n-1$ 个顶点。把所有坐标置为$1/2$ 是可行解，值为$n/2$；对所有边约束求和有$(n-1)\sum_v x_v \ge n(n-1)/2$，所以$\mathrm{LP} = n/2$。其间隙为

$$\frac{n-1}{n/2} = 2 - \frac{2}{n} \longrightarrow 2.$$

结合舍入定理可知，该基本松弛的最坏整数性间隙恰为2。这里的例子衡量的是LP 下界的质量，不应与同一个实例上某次舍入输出相对于OPT 的比值混淆。

2 第二部分：无关机调度

2.1 猜测完工时间上界

给定作业集J 和机器集M。作业j 在机器i 上处理时间为p_{ij}，禁止的安排记为$p_{ij} = \infty$。安排$\sigma : J \to M$ 的最大完工时间为$\max_i \sum_{j:\sigma(j)=i} p_{ij}$。与相同机器不同，处理时间可以任意依赖两个下标。对试探值$T \geq 0$，先排除所有$p_{ij} > T$ 的对，因为完工时间至多为T 的安排不可能使用它们。在$E_T = \{(i,j) : p_{ij} \leq T\}$ 上求可行性LP：

$$\sum_{i:(i,j)\in E_T} x_{ij} = 1 \ (j \in J), \qquad \sum_{j:(i,j)\in E_T} p_{ij}x_{ij} \leq T \ (i \in M), \qquad x \geq 0. \tag{2.1}$$

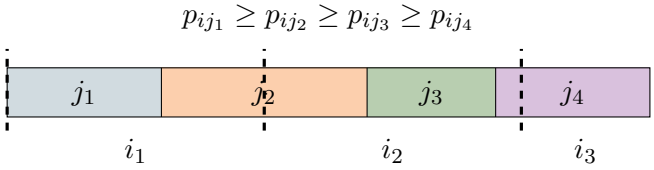
不可行说明T 太小。可行并不保证存在完工时间为T 的整数安排，但我们将恢复一个完工时间至多为$2T$ 的安排。预先排除过大作业–机器对是关键，因为最终分析要给每台机器额外计入一个完整作业。

2.2 把机器拆成槽位

槽位构造与匹配

1. 对每台机器i，按p_{ij} 非增顺序排列其正分数分配，在直线上依次放置宽度为x_{ij} 的片段。
2. 把直线划为单位长度槽位$i_1, \ldots, i_{a_i}$，其中$a_i = \lceil \sum_j x_{ij} \rceil$，最后一槽可不满。
3. 令$z_{i_t j}$ 为作业j 的片段与槽i_t 的重叠长度，重叠为正时建立二分图边。
4. 寻找覆盖全部作业的整数匹配，把每个作业安排到其匹配槽位所属的原机器。

每个作业的关联分数总量为1，每个槽位的总量至多为1，因此z 是总大小为$|J|$ 的分数二分匹配。由二分匹配整数性，最大基数匹配至少有此大小，故覆盖所有作业。也可直接使用Hall 定理：任意作业子集U 的质量$|U|$ 必须装入相邻的单位容量槽位，因此$|N(U)| \geq |U|$。



这个局部示意例子的片段宽度为$0.6, 0.8, 0.5, 0.6$。作业j_2 和j_4 分别跨越槽位边界。拆分分数并不意味着最终拆分作业，匹配会为每个作业恰好选一个槽位。

2.3 把后面的作业计入前一个槽位

定理2.1 (Shmoys–Tardos 槽位舍入)**.** 在所构造的支撑图中，任意覆盖全部作业的匹配都使每台原机器的负载至多为$2T$。

证明. 固定机器i，记匹配到槽i_t 的作业为k_t；若槽未匹配，则用处理时间为零的虚拟作业代替。首个作业满足$p_{ik_1} \leq T$。对$t \geq 2$，前一槽i_{t-1} 必定是满槽；由于片段按处理时间非增排列，且k_t 与后一槽有正重叠，前一槽中的每个处理时间都至少为p_{ik_t}。因此

$$p_{ik_t} \leq \sum_j z_{i_{t-1}j} p_{ij}.$$

对全部槽求和得到

$$\begin{aligned}\mathrm{load}(i) &= \sum_{t=1}^{a_i} p_{ik_t} \\ &\le T + \sum_{t=1}^{a_i-1} \sum_{j} z_{i_t j} p_{ij} \\ &\le T + \sum_{j} x_{ij} p_{ij} \le 2T.\end{aligned}$$

没有槽位时负载为零；只有一个槽位时，只需首作业界。 □

排序是该证明成立的关键。仅仅任意拆出足够多个槽，虽然能保留匹配约束，却无法把舍入后的作业与前一槽分数负载比较。

2.4 得到多项式时间二近似算法

对整数处理时间，式 (2.1) 的可行性随整数目标T 单调变化。在零与任意可行安排的完工时间之间二分，得到最小可行整数目标T_0。由于最优整数安排使LP 在$T = \mathrm{OPT}$ 时可行，故$T_0 \le \mathrm{OPT}$。舍入后的完工时间至多为$2T_0 \le 2\,\mathrm{OPT}$。若某个作业在所有机器上都无有限处理时间，则实例不可行；目标为零时只使用零时间对即可。有理输入可先乘公分母，再使用上述论证。公分母的数值可能很大，但各分母乘积的位数至多为输入分母总位数，二分只需要对数次目标测试。若改用数值目标搜索，则必须显式计入误差容限。舍入图规模仍然很小：$\sum_i \sum_j x_{ij} = |J|$，所以$\sum_i a_i \le |J| + |M|$。每个正$x_{ij} \le 1$ 至多跨两个槽。因此排序和求二分图最大匹配都为多项式时间，不必计算指数规模的凸分解。

3 课后独立练习

1. 考虑二元覆盖问题及其松弛$\min\{c^{\mathsf{T}}x : \sum_{j \in S_i} x_j \ge 1 \ (i \in [m]),\ 0 \le x \le 1\}$，其中$c \ge 0$、$1 \le |S_i| \le k$，整数解要求$x \in \{0,1\}^n$。证明以$1/k$ 为阈值的舍入得到可行解，且成本至多为LP 最优值的k 倍，从而是k 近似。
2. 验证K_n 的间隙计算，并解释为什么大于$1/2$ 的阈值会破坏可行性。
3. 对一台机器，分数为$0.6, 0.8, 0.5, 0.6$，处理时间为$9, 7, 4, 2$，计算每个槽的重叠量和分数负载，并对各槽支持的作业验证前槽界。
4. 直接利用Hall 定理证明槽位图存在覆盖全部作业的匹配。
5. 构造例子说明保留$p_{ij} > T$ 的对为何会使$2T$ 证明失效。
6. 选做：从指数矩不等式推导下文拥塞尾界，注意不能在等式中把真实均值直接替换成C。

A 选读：拥塞最小化

A.1 分数路由与稀疏路径分布

给定简单有向图和终端对(s_i, t_i)，为每一对选一条路径，以最小化任意边上使用路径数的最大值。先删除$s_i = t_i$ 的平凡请求；若没有剩余请求，最优值为零；若某对之间无路径，则不可行。否则整数最优值至少为一。对每个请求i，给其简单路径分配非负质量z_{iP}，总量为一。在每条边上要求$\sum_i \sum_{P \ni e} z_{iP} \le C_{\mathrm{LP}}$，并最小化$C_{\mathrm{LP}}$。虽然路径数可能为指数级，但可用请求弧流$f_{ie} \ge 0$ 紧凑表述：s_i 处净流出一，t_i 处净流入一，其他顶点守恒，且$\sum_i f_{ie} \le C_{\mathrm{LP}}$。把每种请求流分解

成路径与环，再删去环，便得到总质量为一且边使用量不增的稀疏路径分布。因此两个LP 最优值相同，采样也无需列出全部路径。定义$C = \max\{1, C_{\mathrm{LP}}\} \le \mathrm{OPT}$；这里与一取最大值不可省略，因为分数拥塞可以小于一。

A.2 独立舍入与联合界

对每个请求独立地按概率z_{iP} 采样路径P_i。固定边e，令X_i 表示$e \in P_i$。这些变量在不同请求之间独立，且$\mu_e = \sum_i \mathbb{E}X_i \le C$。对任意$\lambda > 0$，

$$\mathbb{E}\exp\left(\lambda \sum_i X_i\right) = \prod_i \left(1 + \mathbb{E}X_i(e^\lambda - 1)\right) \le \exp\left(C(e^\lambda - 1)\right).$$

取$\lambda = \ln \alpha$，由Markov 不等式，对$\alpha > 1$ 有

$$\mathbb{P}[\mathrm{cong}(e) \ge \alpha C] \le \exp\{-C(\alpha \ln \alpha - \alpha + 1)\}. \tag{A.1}$$

选择α 使$\alpha \ln \alpha - \alpha + 1 \ge \ln(2m)$，其中$m = |E|$。由于$C \ge 1$，每条边的失败概率至多为$1/(2m)$，联合界给出至少$1/2$ 的成功概率。对足够大的m，取$\alpha = O(\log m / \log\log m)$ 即可。简单有向图满足$m \le n^2$，于是得到课件中的$O(\log n / \log\log n)$ 界，小规模实例可用常数单独覆盖。

舍入后的拥塞可以直接计算，因此可重复独立试验直到满足目标界，期望试验次数至多为二。若$C = \Omega(\log m)$，常数$\alpha > 1$ 已足以使 (A.1) 足够小。因此较大的分数负载会改善相对舍入损失。联合界不要求不同边之间独立。

A.3 两个有用的补充

若所有源点相同，则可用整数最大流精确求解。对试探整数拥塞B，给每条原边容量B，添加超级汇点，并从每个需求的终点t_i 加一条单位容量需求弧。值为k 的流会饱和所有需求弧，其整数分解为每个需求给出一条路径；重复终点用平行需求弧表示。

去随机化时，取满足前述界的整数$\alpha > 1$，并令整数阈值$L = \lceil \alpha C \rceil$。考虑指数惩罚之和$\sum_e \alpha^{\mathrm{cong}(e) - L}$，其初始期望至多为$1/2$。逐一固定请求，每次选择一个不会增加条件期望的支撑路径；由平均值原理，这样的路径必存在。剩余期望在独立请求之间可因式分解，能从边际概率计算。最终该和小于一，故没有边的拥塞达到L。当路径权重为有理数时，只涉及有理乘积和整数幂，从而把条件期望思路落实为可计算过程。

来源与阅读说明

主要依据：授课教师的课件文件夹

`4.LPRounding`

`Topics.tex` 与`Optional.tex`.

选读部分对应课件中的选讲内容（如有）。补充的例子和练习服务于课后阅读，不占用新的授课讲次。

课程网站. 网站上前段课程的讲义用于参考组织方式与展开程度，本专题的内容仍以线性规划课件为准。