高级算法/ 2026 年秋季

线性规划与优化专题

分离与对偶的应用

割多胞体、网络流与零和博弈

第4 讲：100 分钟

本讲义仅覆盖栗师老师负责的线性规划专题。本专题共九讲，每讲100 分钟，讲次编号与课件一致。第一、第二部分是本讲内部的阅读划分；选读附录供课后拓展。

授课教师：栗师
南京大学

以授课教师的课件为依据，借助AI 将讲解、证明和课后练习展开为文字。中英文版本的数学内容相互对应。

学习目标与阅读路线

即使无法列出全部约束，LP 仍可能有算法价值。第一部分用寻找违反约束的算法替代显式约束表；第二部分利用同样的路径不等式连接流与割，再用LP 对偶证明有限零和博弈的极小极大定理。

1. 为路径覆盖约束实现分离判定器。
2. 证明割多胞体定理，包括从逐坐标支配补全为精确凸组合的步骤。
3. 从LP 表述与舍入推导最大流最小割及极小极大定理。

选读附录展开课件中的生成树分离练习和椭球体积论证。下文除特别说明外，所有容量与边长均非负。

目录

1 第一部分：分离判定器与割多胞体 **1**
1.1 寻找被违反的不等式 1
1.2 把割定义为删边集合 1
1.3 阈值舍入与精确边际概率 1

2 第二部分：网络流与零和博弈 **2**
2.1 流的两种表述 2
2.2 由对偶得到最大流最小割 2
2.3 有限零和博弈 2

3 课后独立练习 **3**

A 选读：生成树与匹配的分离 **3**
A.1 通过闭包网络分离生成树约束 3
A.2 奇割与冗余约束 4

B 选读：椭球体积计算 **4**

1 第一部分：分离判定器与割多胞体

1.1 寻找被违反的不等式

定义1.1. 集合$P \subseteq \mathbb{R}^n$ 的分离判定器输入候选点z，或者确认$z \in P$，或者返回a, β，使所有$x \in P$都满足$a^\top x \le \beta$，但$a^\top z > \beta$。它必须返回有效的分离不等式，而不只是回答“不在集合内”。

对显式给出的多项式规模LP，只需检查每一行。对指数规模约束族，关键是无需枚举就能寻找最大违反程度。判定器的运行时间必须计入有理查询点的编码长度。

椭球可行性算法：几何概要

1. 从一个包含目标可行集的椭球开始。
2. 查询椭球中心；若可行则返回。
3. 否则保留分离超平面中包含可行集的一侧，并用体积更小的椭球包住相应的过中心半椭球。
4. 结合定量的半径、精度与终止界重复。

优化可以通过加入试探目标约束（如$c^\top x \le \gamma$）归约为可行性，这条新约束本身可直接检查。在通常的有理编码和规模界条件下，并适当处理低维集合，分离能够导出多项式时间优化。仅有几何概要还不是完整的位复杂度证明，附录将解释体积界及其假设。

1.2 把割定义为删边集合

设$G = (V, E)$ 为有向图，s, t 是不同终端。本处的s–t 割指删去后能破坏全部有向s–t 路径的任意边集C。因此割的超集仍是割。这个约定比要求C 恰等于某个顶点集的出边边界$\delta^+(S)$ 更宽。

定理1.2 (割多胞体的路径描述)**.** 令$\mathcal{P}$ 为全部简单有向s–t 路径，则

$$\operatorname{conv}\{\chi^C : C \text{ 是}s\text{–}t \text{ 割}\} = Q := \{x \in [0,1]^E : x(P) \ge 1, \text{对任意} P \in \mathcal{P}\}.$$

割会命中每条路径，故其示性向量满足这些约束。进行分离时，先检查$0 \le x_e \le 1$，再以x_e 为边长求最短s–t 路径；长度小于1 的路径就是违反的约束，否则所有路径约束均成立。若不存在路径，则没有路径约束可能被违反。

1.3 阈值舍入与精确边际概率

定理 1.2 的证明. 对可行x，令$d(v)$ 为从s 出发的最短路距离并截断在1；不可达顶点也赋距离1。于是$d(s) = 0$、$d(t) = 1$，且每条弧uv 满足$d(v) - d(u) \le x_{uv}$。在$(0,1)$ 中均匀选择θ，令$S_\theta = \{v : d(v) \le \theta\}$，并取$C_\theta = \delta^+(S_\theta)$，这必为$s$–$t$ 割。

$$p_{uv} := \mathbb{P}[uv \in C_\theta] = \max\{d(v) - d(u), 0\} \le x_{uv}.$$

这只证明了$\mathbb{E}\chi^{C_\theta} \le x$，还没有得到等号。为了完成凸包证明，在边$e$ 未出现时，以如下概率独立加入它：

$$q_e = \frac{x_e - p_e}{1 - p_e} \quad \text{当} p_e < 1.$$

若$p_e = 1$，则必有$x_e = 1$，无需改变。扩充后的C' 仍是割，且$\mathbb{P}[e \in C'] = p_e + (1 - p_e)q_e = x_e$。边集总数有限，因此该分布将$x$ 精确表示为割示性向量的凸组合。 □

阈值舍入的两种不同用途

对非负成本目标，逐坐标支配已经足以证明存在一个成本不超过分数解的阈值割；若要证明整个可行域等于所有删边割的凸包，还需精确边际概率，因此必须补上扩充步骤。

2 第二部分：网络流与零和博弈

2.1 流的两种表述

弧流变量f_e 满足$0 \le f_e \le c_e$，并在除s,t 以外的每个顶点满足流守恒，以进入t 的净流量为最大化目标。这种表述每条弧一个变量，规模紧凑。为了理解对偶，另一种表述更直观：在每条简单s–t路径上放置非负流量f_P。

$$\begin{aligned} \max \quad & \sum_{P\in\mathcal{P}} f_P && \min \quad & \sum_{e\in E} c_e y_e \\ \text{约束为} \quad & \sum_{P\ni e} f_P \le c_e \quad (e\in E) && \text{约束为} \quad & \sum_{e\in P} y_e \ge 1 \quad (P\in\mathcal{P}) \\ & f_P \ge 0 && & y_e \ge 0. \end{aligned} \tag{2.1}$$

路径流解可以直接产生弧流。反过来，具有非负流值的非负弧流可分解成s–t 路径与有向环；每次找到一条路径或环，减去其最小剩余流量，就会使至少一条正流弧消失。丢弃环不会增加任何弧上的用量，也不改变净流值。因此两种表述的最优值相同。

左侧是装箱型LP：各条路径流竞争弧容量。其对偶为每条边赋非负长度，使所有s–t 路径长度至少为1。对偶虽有指数条约束，但可使用最短路分离判定器。实际计算中紧凑弧LP 往往更方便，路径LP 则使定理结构更清晰。

2.2 由对偶得到最大流最小割

定理2.1. 对具有非负有限容量的有限有向网络，最大s–t 流值等于最小s–t 割容量。

证明. 式 (2.1) 的原始问题在零流处可行且有界，故由强对偶，它的最优值等于有限的对偶最优值。给定任意对偶可行y，以y 为边长定义截断距离，再如前选择随机阈值割。每条边跨割的概率至多为y_e，因此

$$\mathbb{E}[c(C_\theta)] \le \sum_e c_e y_e.$$

存在某个阈值割的容量不超过对偶最优值。另一方面，每个割示性向量都对偶可行，因此对偶最优值不超过最小割。两个方向迫使相等。若y 最优，则每个以正概率出现的阈值割都最优：它们不可能比最小割更便宜，而平均值又不超过最小割。 □

这个证明区分了两种整数性事实：容量为整数时，由全幺模性可得整数最优流；但最优割向量的整数性对任意非负实容量都成立，它来自阈值舍入，而不是容量的整数性。

2.3 有限零和博弈

令$M \in \mathbb{R}^{m\times n}$ 为收益矩阵。行玩家希望最小化收益，列玩家希望最大化收益。混合策略是概率分布：$x \in \Delta_m = \{x \ge 0 : \mathbf{1}^\top x = 1\}$、$y \in \Delta_n$。双方独立按混合策略行动时，期望收益为$x^\top M y$。面对固定$x$，列玩家可以选择纯最优回应，因为加权平均不会超过最大的列收益；同理，面对固定y，某个纯行可以达到最小行收益。因此两种先后顺序的值分别为

$$\min_{x\in\Delta_m} \max_j x^\top M_{\cdot j}, \qquad \max_{y\in\Delta_n} \min_i M_{i\cdot} y.$$

定理2.2 (极小极大定理)**.**

$$\min_{x\in\Delta_m}\max_{y\in\Delta_n} x^\top My = \max_{y\in\Delta_n}\min_{x\in\Delta_m} x^\top My =: V. \tag{2.2}$$

证明. 行玩家的优化问题及其对偶为

$$\begin{array}{lll} \min & R & \max \quad C \\ \text{约束为} & M^\top x \le R\mathbf{1} & \text{约束为} \quad My \ge C\mathbf{1} \\ & \mathbf{1}^\top x = 1,\ x \ge 0 & \quad\ \mathbf{1}^\top y = 1,\ y \ge 0, \\ & R \in \mathbb{R} & \quad\ C \in \mathbb{R}. \end{array}$$

自由变量R 迫使对偶满足归一化$\mathbf{1}^\top y = 1$，原始归一化等式则产生自由变量C。两个规划都可行，且值介于矩阵最小和最大元素之间。强对偶即得 (2.2)。 □

最优策略x^*, y^* 构成鞍点：

$$x^{*\top} My \le x^{*\top} My^* = V \le x^\top My^* \qquad (x \in \Delta_m,\ y \in \Delta_n).$$

每个玩家都能在不知道对手所选策略的情况下保证博弈值。这并不意味着所有策略都最优，也不意味着纯策略足够。石头–剪刀–布中，双方均匀混合可得到零值，而一个暴露的纯策略会被利用。

互补松弛进一步刻画均衡：

$$x_i^* > 0 \Longrightarrow M_{i\cdot} y^* = V, \qquad y_j^* > 0 \Longrightarrow x^{*\top} M_{\cdot j} = V.$$

因此，每个以正概率使用的纯行动，对对手的最优策略都具有相同收益。未使用的行收益可以更大，未使用的列收益可以更小，与各自优化方向一致。第七单元将用乘法权重更新近似求解该均衡。

3 课后独立练习

1. 在自选图上实现割分离判定器，为某个分数候选点找出被违反的路径约束。
2. 构造某个坐标满足$\mathbb{E}\chi^{C_\theta} < x$ 的例子，并计算扩充概率q_e。
3. 说明如何通过排序不同距离去随机化阈值割选择：在每对相邻距离之间取一个阈值并计算割值。
4. 求解零和博弈$M = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$，验证鞍点不等式。
5. 利用第三单元的符号规则直接推导两个博弈LP，说明对任意收益矩阵为什么不能要求R, C 非负。
6. 选做：验证下文用于生成树分离的最小割归约，包括为什么需要强制一个顶点被选中。

A 选读：生成树与匹配的分离

A.1 通过闭包网络分离生成树约束

先检查$x \ge 0$ 与$x(E) = |V| - 1$。被违反的生成树约束满足$x(E[S]) > |S| - 1$。枚举一个顶点$r \in S$，赋顶点成本$w_r = 0$、$w_v = 1$（$v \ne r$），然后最大化

$$\sum_{e\in E[S]} x_e - \sum_{v\in S} w_v, \qquad r \in S.$$

建立网络：源点a、汇点b，每条原边及每个原顶点各对应一个结点；加入容量为x_e 的弧$a \to e$，对$e = uv$ 加入容量为H 的弧$e \to u, e \to v$，并加入容量为w_v 的弧$v \to b$。再加入容量为H 的弧$a \to r$，取$H > \sum_e x_e + \sum_v w_v$。最小割不会切断$H$-弧，因此源侧边结点的两个端点也必须在源侧，且$r$ 在源侧。固定所选顶点集S 后，最便宜的选择会把全部内部边结点放在源侧，割容量变为

$$\sum_e x_e - \sum_{e \in E[S]} x_e + \sum_{v \in S} w_v.$$

它小于$\sum_e x_e$ 当且仅当S 违反某条生成树约束。对所有r 重复即可。无自环图中单点集不可能产生正收益，因此该测试自动找到大小至少为二的集合。这展开了课件中“最密子图归约到最大流”的提示。

A.2 奇割与冗余约束

对完美匹配，先检查非负性和度等式，再以x_e 为容量寻找最小容量奇割。无向容量图的Gomory–Hu 割树可以完成此事：在删除后产生奇数顶点侧的树边中取最小权重，其基本图割就是最小奇割。这里总顶点数为偶数。其奇偶性原因是，这些奇侧树边构成的边集在每个树顶点处的度均为奇数，因此任何奇顶点集都至少跨越其中一条。对这样跨越候选奇割的树边uv，其权重是最小u–v 割值，所以不超过该候选奇割容量。约束描述不必无冗余。生成树系统中，若诱导子图不连通，其约束可由各连通分量的约束相加得到；若诱导连通子图有桥且至少三个顶点，则可将桥两侧的约束与桥边界$x_e \le 1$ 相加。在仿射包内，只有无冗余描述才与面片一一对应。

B 选读：椭球体积计算

可逆仿射变换保持体积比，并把过中心半椭球变为半单位球$\{x : \|x\|_2 \le 1,\ x_1 \ge 0\}$。对维数$n \ge 2$，取

$$c = \frac{1}{n+1}, \qquad a = \frac{n}{n+1}, \qquad b = \frac{n}{\sqrt{n^2-1}}.$$

以$(c, 0, \dots, 0)$ 为中心、半轴为$(a, b, \dots, b)$ 的椭球包含半球。事实上，对$t = x_1 \in [0,1]$ 且$\sum_{i \ge 2} x_i^2 \le 1 - t^2$，

$$\frac{(t-c)^2}{a^2} + \frac{1-t^2}{b^2} = 1 - \frac{2(n+1)}{n^2} t(1-t) \le 1.$$

其体积与单位球体积之比为ab^{n-1}。利用$\ln(1+u) \le u$，

$$\begin{aligned} \ln(ab^{n-1}) &= \ln \frac{n}{n+1} + \frac{n-1}{2} \ln \frac{n^2}{n^2-1} \\ &\le -\frac{1}{n+1} + \frac{n-1}{2(n^2-1)} = -\frac{1}{2(n+1)}. \end{aligned}$$

经过N 次未成功的迭代，外包体积至多缩小为原来的$\exp(-N/(2(n+1)))$。若初始区域包含于半径R 的球，且每个非空目标区域都包含半径r 的球，则

$$N > 2n(n+1)\ln(R/r)$$

会使剩余目标非空变得不可能。因此判定器调用次数为$O(n^2 \log(R/r))$。一维情形使用区间二分。

体积论证中不能自动成立的条件

低维非空多胞体的环境空间体积为零，也不包含正半径的环境球。因此内半径保证需要通过仿射包归约、受控加厚或完整的有理LP 理论来处理，有限精度更新也需要单独分析。上面的几何次数界本身并不是对任意判定器表示凸集的完整算法证明。

来源与阅读说明

主要依据：授课教师的课件文件夹

`4.SeparationAndApplications`

`Topics.tex` 与`Optional.tex`.

选读部分对应课件中的选讲内容（如有）。补充的例子和练习服务于课后阅读，不占用新的授课讲次。

课程网站. 网站上前段课程的讲义用于参考组织方式与展开程度，本专题的内容仍以线性规划课件为准。