高级算法/ 2026 年秋季

线性规划与优化专题

扩展复杂度

扩展表述与非负秩

第7 讲：100 分钟

本讲义仅覆盖栗师老师负责的线性规划专题。本专题共八讲，讲次编号与课件一致。第一、第二部分是本讲内部的阅读划分；选读附录供课后拓展。

授课教师：栗师
南京大学

以授课教师的课件为依据，借助AI 将讲解、证明和课后练习展开为文字。中英文版本的数学内容相互对应。

学习目标与阅读路线

面片数为指数级，并不意味着每一种LP 模型都很大：引入额外变量可能显著压缩表述。第一部分构造排列多胞体的扩展表述；第二部分证明，最小扩展的规模恰好由一个矩阵分解参数刻画。

- 区分多胞体、扩展及其投影映射。
- 在投影证明中验证两个方向的包含关系，并统计不等式数，而不只是变量数。
- 用LP 对偶将扩展表述转化为松弛矩阵的非负分解。

主线内容的预备知识为二部图匹配多胞体及LP 对偶。生成树的扩展表述与课件一致，移至选读附录；该部分还使用生成树多胞体及网络流概念。最后列出的复杂度下界用于说明理论的意义，其研究级证明不包含在本讲中。

目录

1 第一部分：在更高维空间中建立更小的LP **1**
1.1 扩展及其规模 1
1.2 等式加非负约束的标准形式 1
1.3 排列多胞体 1

2 第二部分：松弛矩阵与非负秩 **2**
2.1 不允许抵消的分解 2
2.2 多胞体的松弛矩阵 2
2.3 松弛矩阵定理 3
2.4 附加行列与复杂度下界 3
2.5 课后练习 4

A 选读：生成树的紧凑表述 **4**
A.1 选读练习 5

1 第一部分：在更高维空间中建立更小的LP

1.1 扩展及其规模

对组合可行解族$\mathcal{S} \subseteq 2^{[n]}$，令$P = \mathrm{conv}\{\chi^S : S \in \mathcal{S}\}$。在$P$ 上优化线性目标可精确求解原组合优化问题。在其仿射包中，一个完整且无冗余的不等式表述为每个面片对应一个不等式。这样的面片数可能是指数级的。

定义1.1. 非空多胞体$P \subseteq \mathbb{R}^n$ 的一个扩展是多面体$Q \subseteq \mathbb{R}^{n+r}$，满足

$$P = \{x \in \mathbb{R}^n : \exists y \in \mathbb{R}^r,\ (x, y) \in Q\}.$$

扩展的规模是在其仿射包内无冗余表述所需的不等式数；仿射等式不计入规模。扩展复杂度$\mathrm{xc}(P)$是所有扩展中的最小规模。

目标仍为$c^{\mathsf{T}}x$，不能任意为辅助变量添加新费用。当系数、等式和变量的编码规模也适当有界时，一个小规模有理扩展表述可用于高效的LP 优化。扩展复杂度首先是几何意义上的不等式计数；它本身既不限制系数的位数，也不自动给出构造该表述的算法。

1.2 等式加非负约束的标准形式

命题1.2. 等价地，$\mathrm{xc}(P)$ 是使下式成立的最小r：

$$P = \{x : \exists y \in \mathbb{R}^r_{\geq 0},\ Ex + Fy = g\}.$$

证明. 这样的系统定义了一个至多有r 个面片的扩展，因为它仅有r 个非负不等式。反过来，取一个有r 个面片不等式的扩展，为每个不等式引入一个非负松弛变量，将其改为等式。此时还可能剩下不受符号限制的辅助变量z，整个等式系统可写成

$$Bz = h - Dx - Hy, \qquad y \geq 0.$$

令N 的行构成B 的左零空间的一组基。一个向量属于B 的列空间，当且仅当被N 乘后为零。因此消去z 后，仅剩$N(Dx + Hy) = Nh$ 与$y \geq 0$，没有增加任何不等式。 □

1.3 排列多胞体

设P_n 为向量$(1, 2, \ldots, n)$ 的所有排列的凸包，其中$n \geq 2$。每个点都满足$\sum_i x_i = n(n+1)/2$。固定一个位置，分别将其值与其他位置交换，所得差向量张成坐标和为零的子空间，因此$\dim P_n = n - 1$。

命题1.3. 每个非空真子集$S \subsetneq [n]$ 都给出一个面片不等式

$$\sum_{i \in S} x_i \geq \frac{|S|(|S|+1)}{2}.$$

证明. 若$|S| = k$，这些位置上的值之和至少为$1 + \cdots + k$，所以不等式有效。取等号的排列恰好将$1, \ldots, k$ 放在S 中，将$k+1, \ldots, n$ 放在补集中。S 内部的交换张成$k-1$ 维空间，补集内部的交换张成$n-k-1$ 维空间。这两个空间的支撑不相交，所以方向线性独立。等号面维数至少为$n-2$，额外的等式又使其维数至多为$n-2$，故它确实是一个面片。 □

这些不等式给出$2^n - 2$ 个不同的面片。然而，一个排列也可以由排列矩阵Y 表示：当位置i 放置值j 时，$Y_{ij} = 1$。对应投影是线性的，即$x_i = \sum_j jY_{ij}$。例如，

$$(3, 1, 2) \quad \longleftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

定理1.4 (二次规模的扩展)**.**

$$\sum_i Y_{ij} = 1 \quad (j \in [n]), \qquad \sum_j Y_{ij} = 1 \qquad (i \in [n]),$$
$$Y_{ij} \geq 0 \quad (i,j \in [n]), \qquad x_i = \sum_j j Y_{ij} \quad (i \in [n])$$

是P_n 的一个扩展表述，故$\mathrm{xc}(P_n) \leq n^2$。

证明. 前三组条件描述双随机矩阵。它恰好是完全二部图的完美匹配多胞体，所以由第2 讲可知，每个可行Y 都是排列矩阵的凸组合。线性投影将其变成排列向量的凸组合。反过来，每个排列向量都有相应的排列矩阵提升，而这些提升的凸组合仍然可行。仅有的不等式是n^2 个非负约束。 □

2 第二部分：松弛矩阵与非负秩

2.1 不允许抵消的分解

定义2.1. 对$M \in \mathbb{R}^{a\times b}_{\geq 0}$，非负秩$\mathrm{rank}_+(M)$ 是满足$M = LU$ 的最小$r \geq 0$，其中$L \in \mathbb{R}^{a\times r}_{\geq 0}$、$U \in \mathbb{R}^{r\times b}_{\geq 0}$。等价地，$M$ 可写成r 个非负秩一矩阵之和。

$$\mathrm{rank}(M) \leq \mathrm{rank}_+(M) \leq \min\{a, b\}.$$

下界来自矩阵乘积的秩，上界分别使用$M = I_a M$ 或$M = M I_b$。普通秩允许正负项互相抵消，非负秩则不允许。在数据分析中，可将列视为文档、行视为词语：非负分解将每篇文档表示为若干潜在主题的非负混合。课件中的电影例子也可解释为潜在特征的组合。精确计算非负秩是NP 困难的；这是一个独立定理，而不是上述简单不等式的推论，参见Vavasis 的论文。

2.2 多胞体的松弛矩阵

设$P = \{x : Ax \leq b,\ Hx = h\}$ 为一个非空且维数为正的多胞体。等式描述其仿射包，A 的各行对应其各个面片。将顶点列为$v^1, \ldots, v^N$。

定义2.2. 松弛矩阵为$S \in \mathbb{R}^{m\times N}_{\geq 0}$，其元素为

$$S_{ij} = b_i - a_i^{\mathsf{T}} v^j.$$

零元素记录关联关系：顶点v^j 位于面片i 上。正松弛量表示该不等式距离取等号还有多少余量；只有将$\|a_i\|_2$ 归一化为1，它才等于到超平面的欧氏距离。对行作正数缩放会改变元素值，但不会改变非负秩。

例2.3 (三角形)**.** 对$P = \{(x_1, x_2) : x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_1 + x_2 \leq 1\}$，按$(0,0), (1,0), (0,1)$ 的顺序排列顶点，有

$$S = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathrm{rank}(S) = \mathrm{rank}_+(S) = 3.$$

普通秩给出非负秩至少为三，行数则给出非负秩至多为三。

2.3 松弛矩阵定理

定理2.4 (Yannakakis)**.** 对上述多胞体及其松弛矩阵，有

$$\boxed{\mathrm{xc}(P) = \mathrm{rank}_+(S).}$$

由分解构造扩展. 设$S = LU$ 是一个内维数为r 的非负分解。考虑

$$Q = \{(x, z) : Hx = h,\ Ax + Lz = b,\ z \geq 0\}.$$

其投影包含于P，因为$Lz \geq 0$ 蕴含$Ax \leq b$。反过来，第j 个顶点可以取$z = U_{\cdot j}$ 来提升，因为$Av^j + LU_{\cdot j} = b$。P 中每个点都是顶点的凸组合，同样组合对应的提升仍属于Q。所以Q 的投影恰好为P，而它仅有r 个不等式，故$\mathrm{xc}(P) \leq \mathrm{rank}_+(S)$。 □

由扩展构造分解. 使用等价形式$P = \{x : \exists z \geq 0,\ Ex + Fz = g\}$，其中$z$ 有r 个坐标。对每个顶点v^j，固定一个可行提升z^j。对于面片i，考虑LP

$$\max\ a_i^{\mathsf{T}} x \quad \text{约束为} Ex + Fz = g,\ z \geq 0, \qquad x \text{ 不受符号限制.}$$

该LP 的最优值恰好为b_i：面片不等式有效，且在P 中某处取等号。LP 对偶保证存在一个不受符号限制的向量μ^i，满足

$$E^{\mathsf{T}}\mu^i = a_i, \qquad F^{\mathsf{T}}\mu^i \geq 0, \qquad g^{\mathsf{T}}\mu^i = b_i.$$

因此

$$S_{ij} = b_i - a_i^{\mathsf{T}} v^j = (\mu^i)^{\mathsf{T}}(g - Ev^j) = (\mu^i)^{\mathsf{T}} F z^j.$$

令第i 行$L_{i\cdot} = (\mu^i)^{\mathsf{T}}F \geq 0$，第$j$ 列$U_{\cdot j} = z^j \geq 0$，则$S = LU$，内维数为r，故$\mathrm{rank}_+(S) \leq \mathrm{xc}(P)$。 □

假设用在何处

构造扩展时必须保留仿射包等式，否则投影可能扩大。在反向证明中，支撑不等式能够取等号，才保证对偶最优值恰好为b_i，从而消除可能出现的额外常数松弛。对于只包含一个点的多胞体，单靠等式即可描述，扩展复杂度为零，可单独处理。

2.4 附加行列与复杂度下界

添加P 中非顶点的松弛列不会增大非负秩，因为它是顶点列的同一个凸组合。类似地，添加一个在非空面上取等号的有效支撑不等式行，也不会增大非负秩。由LP 对偶，其在P 上的松弛量是面片松弛量的非负组合，仿射包等式的贡献为零。这里的论证针对支撑不等式；对带有额外正常数偏移的一般冗余不等式，需要另外说明。该定理给出一种证明下界的策略：寻找非负秩很大的松弛子矩阵。课件提到的著名结果适用于以下多胞体族。

- 旅行商多胞体是完全图K_n 中所有Hamilton 圈示性向量的凸包。
- 割多胞体是完全图中$\mathrm{conv}\{\chi^{\delta(S)} : S \subseteq V\}$。这里指割边界，与第3 讲中向上封闭的删边割族不同。
- 相关多胞体为$\mathrm{conv}\{bb^{\mathsf{T}} : b \in \{0,1\}^n\}$。

Fiorini、Massar、Pokutta、Tiwary 与de Wolf 利用与通信复杂度的联系，为这些多胞体族建立了指数型下界，参见原论文。Rothvoss 证明：偶数n 个顶点的完全图完美匹配多胞体具有$2^{\Omega(n)}$ 的扩展复杂度，参见匹配多胞体论文。一般匹配多胞体也继承该下界，因为其最大基数面正是完美匹配多胞体。匹配结果揭示了一个关键区别：多项式时间优化与分离，并不蕴含多项式规模的扩展表述。下界排除的是小规模精确LP 表述，并没有排除多项式时间匹配算法。这些下界是无条件的几何结论，并非从$P \neq NP$ 推导而来。

2.5 课后练习

1. 写出P_3 的六个顶点与六个面片不等式。为$(2,2,2)$ 构造一个分数双随机矩阵提升。
2. 写出正方形$[0,1]^2$ 的松弛矩阵，证明其普通秩为三。你能证明其非负秩为四吗?
3. 证明非负秩在行列正数缩放以及行列置换下保持不变。
4. 证明一个多胞体的任意面的扩展复杂度不超过原多胞体：在扩展中加入定义该面的等式。
5. 给定松弛矩阵的一个分解，显式提升一个以顶点凸组合形式给出的点。为什么较小的普通秩分解可能无法给出扩展?
6. 证明非负秩一矩阵中正元素的位置构成一个行列指标的矩形。利用这一性质，给出一个基于支撑集的非负秩下界。

A 选读：生成树的紧凑表述

设$G=(V,E)$ 为有$n\geq 2$ 个顶点的连通无自环无向图。回顾

$$P_{\mathrm{ST}}=\{x\geq 0 : x(E)=n-1,\quad x(E[S])\leq |S|-1\quad (\emptyset\neq S\subsetneq V)\}.$$

选定根r，将每条无向边替换为两条有向弧。用y_{uv} 表示分数定向，并为每个目标$v\neq r$ 分别设置一个流f^v。记$\delta^+(u)$ 和$\delta^-(u)$ 为顶点u 的出弧集和入弧集。

生成树的扩展约束系统

$$\begin{aligned}
y(\delta^-(u)) &= 1 && (u\neq r),\\
y(\delta^-(r)) &= 0, && y\geq 0,\\
x_{\{u,v\}} &= y_{uv}+y_{vu} && (\{u,v\}\in E),\\
0\leq f_a^v &\leq y_a && (a \text{ 为弧},\ v\neq r),\\
f^v(\delta^+(u))-f^v(\delta^-(u)) &= \begin{cases} 1 & u=r,\\ -1 & u=v,\\ 0 & \text{其他情况}\end{cases} && (u\in V,\ v\neq r).
\end{aligned}$$

这些流使用同一个容量向量y，但每个流都可单独使用全部容量。这里没有$\sum_v f_a^v\leq y_a$ 的总容量约束；若误加这一约束，会排除许多合法生成树。

定理A.1. 该系统在x 坐标上的投影恰好为P_{ST}。其规模为$O(n|E|)$，在完全图上为$O(n^3)$。

证明. 将任意生成树从根r 向外定向，并沿唯一的根到v 路径发送一单位流。这样可以提升每个生成树示性向量，因此也可以提升它们的整个凸包。反过来，对任意可行提升，将所有入度等式相加，得到总弧权重为$n-1$，故$x(E)=n-1$。固定非空真子集S。

- 若$r\in S$，弧头位于S 中的弧总权重为$|S|-1$。内部弧只是其中一部分，所以$x(E[S])\leq |S|-1$。
- 若$r\notin S$，任选$v\in S$。一单位r–v 流保证$y(\delta^-(S))\geq 1$。将S 中各点的入度求和，得到$x(E[S])+y(\delta^-(S))=|S|$，从而得到同一个不等式。

因此投影满足生成树多胞体的表述。流的非负约束与容量约束共$O(n|E|)$ 个。 □

课件将完全图上的三次上界与二次下界作比较。上面的构造证明了上界，但没有确定最优扩展规模。

A.1 选读练习

1. 举出一棵有根树，说明若生成树扩展误加$\sum_v f_a^v \le y_a$，就会将该树排除。

来源与阅读说明

主要依据：授课教师的课件文件夹

`7.ExtensionComplexity`

`Topics.tex` 与`Optional.tex`.

课程网站. 生成树附录为选读，练习供课后独立完成。