Homework #4

截止日期：5 月 1 日 23:59 之前

问题 #1

令 $d \geq 1$ 为一个整数, 令 T_d 为 d 阶的切比雪夫多项式.

1. 请证明在 $[-1,1]$ 上的无穷范数的意义下, $x^d - \frac{1}{2^{d-1}} T_d(x)$ 是 x^d 的最优的 $d-1$ 阶近似, 其中, $[-1,1]$ 上的无穷范数定义如下:

$$\|p\|_\infty = \sup_{x \in [-1,1]} |p(x)|.$$

2. 给定一个 d 次多项式, $p(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_d x^d$, 请给出在 $[-1,1]$ 上的无穷范数意义下, $p(x)$ 的最优 $d-1$ 阶近似.

问题 #2

一位军官在她的保险箱中存放了一封重要的信. 以防她在战斗中牺牲, 她决定与她的部队分享密码（该密码为一个数字）. 然而，所有人都知道部队中有 3 名间谍，但除了这三名间谍自己，没有人知道他们是谁. 这 3 名间谍可以相互协调，他们要么撒谎使人们无法打开保险箱，要么会尝试他们自己打开保险箱（如果他们能打开的话）. 因此，军官希望分享密码的方案能满足以下条件：

- 当他们中的 M 人聚在一起时，即使他们中间有间谍，他们也能确保打开保险箱.
- 这 3 名间谍的密码不足以让他们三人打开保险箱.

请帮助军官设计一个分享她的密码的方案．这个方案是什么？最小的 M 是多少？展示你的方案并论证为什么你的方案有效，并证明任何更小的 M 都不能工作．注意：部队只有一次机会打开保险箱；如果打开失败，保险箱将自毁.

问题 #3

请找一个 $x_k = Ax_{k-1} + b$ 收敛, 但是 A 的谱半径大于 1 的例子, 要求 $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$. 请指出你的例子中, 矩阵 A, 向量 x_0, 不动点向量 $x^*(\neq x_0)$, 和向量 b 分别是什么.

或者, 请证明这样的例子不存在.

问题 #4

回顾最小二乘法的法线方程 $A^\top Ax = A^\top b$，其中 A 是实数矩阵. 一般来说，$A^\top A$ 可能是不可逆的. 假设 $A^\top A$ 的最大特征值为 1.

1. 任取 $\delta > 0, \mathrm{cond}_2(A^\top A + \delta I)$ 最大可能是多少？注：$\mathrm{cond}_2(\cdot)$ 特指由 2-范数所诱导的矩阵的条件数.

2. 记 $\bar{x} = (A^\top A + \delta I)^{-1} A^\top b$. 证明：

$$\bar{x} = \arg\min_x \|Ax - b\|_2^2 + \delta \|x\|_2^2 .$$

3. 设矩阵 A 的 SVD 分解为 $A = U\Sigma V^\top$。假设 A 的列是满秩的，则最小二乘解可以写作 $x_{LS} = \sum_i \frac{1}{\sigma_i} v_i u_i^\top b$。为了让最小二乘法更加稳定，一个思路是直接舍弃掉 $\sigma_i \approx 0$ 的那些项。试写出 $\bar{x}$ 的一个类似的表达式，并分析为什么它能实现类似于“舍弃掉 $\sigma_i \approx 0$ 的那些项”的效果。

问题 #5

给定矩阵 $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$，记 A_i 为 A 的第 i 行，$A^{(j)}$ 为 A 的第 j 列. 求证:

$$\|A\|_{1\to 2} = \max_{j:1\le j\le n} \left\| A^{(j)} \right\|_2 ,$$

$$\|A\|_{2\to\infty} = \max_{i:1\le i\le n} \|A_i\|_2 .$$

HINT: 第二个等式可能用到 Cauchy-Schwarz 不等式：$\forall x, y \in \mathbb{R}^n$,

$$\langle x, y\rangle^2 \leq \langle x, x\rangle \cdot \langle y, y\rangle.$$

问题 #6

给定多项式 $g(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i x^i$, 保证 $g(x)$ 只有实数根. 令 λ_1 为 g 的最大的根. 假设从某个点 $x^{(0)}$ 开始运行牛顿迭代法，满足 $x^{(0)} \geq \lambda_1$，得到 $x^{(0)}, x^{(1)}, x^{(2)}, \cdots$. 请证明：对于 $k = O(n \log \frac{1}{\varepsilon})$, 牛顿法找到的 $x^{(k)}$ 满足

$$\lambda_1 \leq x^{(k)} \leq \lambda_1 + \varepsilon \cdot \left(x^{(0)} - \lambda_1\right).$$

问题 #7 (Cubic Hermite interpolation)

在计算机图形学中, 三次插值是一个常用的绘制曲线的办法. 直观来说, 绘制这种曲线时, 不仅需要指定曲线的端点, 还需要指定曲线在每个端点处的切线.

1. 假设 $P(t)$ 是如下的三次多项式:

   $$P(t) := at^3 + bt^2 + ct + d.$$

   请写出一个关于 a, b, c, d 的线性条件, 使得对于固定的 h_0, h_1, h_2 和 h_3, $P(t)$ 满足如下的条件:

   $$P(0) = h_0 \quad P'(0) = h_2 \tag{1}$$
   $$P(1) = h_1 \quad P'(1) = h_3. \tag{2}$$

2. 请写出一组三次多项式的 “cubic Hermite” 基 $\{\phi_0(t), \phi_1(t), \phi_2(t), \phi_3(t)\}$, 使得对于任意满足 (1) 的多项式 P 都可以被写成如下形式:

   $$P(t) = h_0\phi_0(t) + h_1\phi_1(t) + h_2\phi_2(t) + h_3\phi_3(t).$$

问题 #8 (Stability of sorting)

给定向量 $X = (X_1, \ldots, X_n)$, 它排序后的版本记作 $\mathrm{sort}(X) = (X_{(1)}, \ldots, X_{(n)})$, 满足 $X_{(1)} \leq \ldots \leq X_{(n)}$. 考虑对 X 加入了一些噪声之后得到的向量 Y，同样记 Y 排序后的版本为 $\mathrm{sort}(Y)$ 满足 $Y_{(1)} \leq \ldots \leq Y_{(n)}$.

注意噪声可能改变了元素的大小顺序.

1. 证明 $|X_{(1)} - Y_{(1)}| \leq \|X - Y\|_2$.
2. 证明 $|X_{(n)} - Y_{(n)}| \leq \|X - Y\|_2$.
3. 证明对所有 k, $|X_{(k)} - Y_{(k)}| \leq \|X - Y\|_2$.
4. 证明 $\|\text{sort}(X) - \text{sort}(Y)\|_1 \leq \|X - Y\|_1$.

问题 #9

一般来说，一个矩阵的秩是不连续的。事实上，可逆矩阵的集合在实数矩阵里面是一个稠密集。这就意味着，一个非满秩的矩阵，可以通过一个任意小的扰动使其变得满秩。这里研究一个相对更稳定的秩的定义，这样的稳定性让 Stable rank 作为 rank 的一个替代量在低秩矩阵近似的研究中得到广泛应用。

一个实矩阵 $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 的 stable rank 定义为

$$\text{STABLE-RANK}(A) \equiv \frac{\|A\|_F^2}{\|A\|_2^2}$$

1. 当矩阵 A 的列向量都等于 $\vec{v} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\vec{0}\}$ 时，证明 $\text{STABLE-RANK}(A) = 1$。
2. 当矩阵 A 的列向量是 orthonormal 时，证明 $\text{STABLE-RANK}(A) = n$。
3. 更一般的，证明 $1 \leq \text{STABLE-RANK}(A) \leq n$。
4. 证明 $\text{STABLE-RANK}(A) \leq \text{RANK}(A)$。