Homework #3

截止日期：3 月 30 日 0:00 之前

问题 #1

考虑切比雪夫多项式 $T_n(x) = \cos(n \arccos x)$, $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$. 对于多项式集合 S, 令 $\mathrm{span}(S)$ 表示所有能够通过 S 中的多项式进行有限次线性组合之后得到的多项式的集合.

1. 对于任意整数 $n \geq 0$, 请构造矩阵 $A \in \mathbb{R}^{(n+1)\times(n+1)}$, 使得 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{t}$, 其中 $\boldsymbol{x} = [1\ x^1\ x^2\ \cdots\ x^n]^\intercal$, $\boldsymbol{t} = [T_0(x)\ T_1(x)\ T_2(x)\ \cdots\ T_n(x)]^\intercal$ (不必写出 A 的精确形式, 只需给出构造方法).

2. 证明对于任意整数 $n \geq 0$ 都有,
$$\mathrm{span}\left\{T_i(x)\right\}_{i=0}^n = \mathrm{span}\left\{x^i\right\}_{i=0}^n.$$

3. 证明 $\{T_i(x)\}_{i=1}^\infty$ 在内积,
$$\langle f, g\rangle = \int_{-1}^1 f(x)g(x)\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}},$$
的意义下构成多项式的一组正交基, 换言之，任意一个多项式可以通过 $T_n(x)$ 的线性组合表示出来，并且对于 $i \neq j$，$T_i(x)$ 与 $T_j(x)$ 是正交的.

问题 #2

对任意函数 $f, g : [-1, 1] \to \mathbb{R}$, 考虑内积
$$\langle f, g\rangle = \int_{-1}^1 f(x)g(x)\mathrm{d}x.$$

请对多项式族 $\{1, x, x^2, x^3\}$ 在内积 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ 下做 Gram-Schmidt 正交化, 并写出在该内积下，该多项式族张成的线性空间的一组正交基.

问题 #3

给定矩阵 $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ 和向量 $\boldsymbol{b} \in \boldsymbol{R}^n$, 最小二乘法可以解决如下问题:

$$\arg\min_{x\in\mathbb{R}^n} \quad \|A\boldsymbol{x} - \boldsymbol{b}\|_2 .$$

现在考虑如下切比雪夫多项式的参数拟合问题:

> 令 $\boldsymbol{t}(x) = [T_0(x)\ T_1(x)\ T_2(x)\ \cdots\ T_n(x)]^\intercal$, 其中, 对于 $0 \le i \le n$, $T_i(x) = \cos(i \arccos x)$ 是切比雪夫多项式. 现在, 给定 $n+1$ 个点对 $\{(x_i, y_i) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \le i \le n\}$, 请找到 $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n$, 使得多项式 $p(x) = \boldsymbol{a}^\intercal \boldsymbol{t}(x)$ 最小化 $\sum_{i=0}^{n}(p(x_i) - y_i)^2$.

请将该问题翻译为最小二乘法能解决的问题 (具体的, 应该说明如何设置 $A, \boldsymbol{b}$, 以及求解完成之后 $\boldsymbol{x}$ 的含义).

问题 #4

1. 假设矩阵 $A \in \mathbb{R}^{n\times m}(n \le m)$ 的行是线性无关的, 请证明 $AA^\intercal$ 是可逆的, 并找出矩阵 $A^\dagger \in \mathbb{R}^{m\times n}$ 使得 $AA^\dagger = I_n$. （HINT: $A^\dagger$ 的表达式里面可以出现 $(AA^\intercal)^{-1}$）

1(a) (附加题) 对于有无穷组解的线性方程组 $Ax = b$, 请证明 $x = A^\dagger b$ 是这些解里面 2-范数最小的. （HINT：可以尝试从几何直观中思考，长度什么时候最短）

2. 对于向量 $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ 和整数 $p > 0$, $\boldsymbol{x}$ 的 p-范数定义为 $\|\boldsymbol{x}\|_p \triangleq \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^p\right)^{\frac{1}{p}}$. 请证明 $\lim_{p\to\infty} \|\boldsymbol{x}\|_p = \|\boldsymbol{x}\|_\infty = \max_{1\le i\le n} |x_i|$.

3. 对于向量 $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$, 请证明 $\|\boldsymbol{x}\|_\infty \le \|\boldsymbol{x}\|_2 \le \sqrt{n}\,\|\boldsymbol{x}\|_\infty$.

问题 #5

在这个题目中, 我们考虑快速傅立叶变换 (FFT).

回顾: 对于多项式 $p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$, 快速傅立叶变换选取 $\omega \in \mathbb{C}$ 为 $n+1$ 次单位根, 计算结束之后得到,

$$\forall 0 \leq j \leq n, \quad p(\omega^j) = \sum_{i=0}^{n} a_i \omega^{ij};$$

快速傅立叶变换的逆变换选取 ω^{-1}, 计算结束之后得到,

$$\forall 0 \leq i \leq n, \quad a_i = \frac{1}{n+1} \sum_{j=0}^{n} p(\omega^j) \omega^{-ij},$$

其中, 逆变换要成立需要满足 $\sum_{i=0}^{n} \omega^i = 0$.

快速傅立叶变换 (FFT) 在实现的时候需要处理复数, 这会带来一些困难. 为了处理这个困难, 在这个问题中, 我们将展示如何在模运算的意义下进行快速傅立叶变换. 简单起见, 我们只考虑 mod 5.

1. 首先, 我们来验证一些简单的事实:

   (a) 对于 $z \in \{1, 2, 3, 4\}$, 计算 $z^4 \equiv ? \pmod 5$.

   (b) 计算, 对于 $\omega = 2$,

   $$\{\omega^0, \omega^1, \omega^2, \omega^3\} \equiv ? \pmod 5$$
   $$\{\omega^0, \omega^2, \omega^4, \omega^6\} \equiv ? \pmod 5$$
   $$\{\omega^0, \omega^4, \omega^8, \omega^{12}\} \equiv ? \pmod 5$$

   (c) 对于 $\omega = 2$, 计算 $1 + \omega + \omega^2 + \omega^3 \equiv ? \pmod 5$.

   不难发现, $\omega = 2$ 在 $\pmod 5$ 的意义下和 $\omega = i$ 有相似的性质. 利用这些性质, 我们可以实现 $\pmod 5$ 意义下的快速傅立叶变换.

2. 令 $\omega = 2$, 用 FFT 求出多项式 $3x + 2x^2$ 在 $\{1, 2, 4, 3\}$ 的值 $\pmod 5$, 写出递归算法运行的大致过程.

3. 某个多项式在 $\{1, 2, 4, 3\}$ 上求出的值分别是 $\{0, 4, 1, 0\} \pmod 5$, 请通过 FFT 的逆变换求出这个多项式, 写出递归算法运行的大致过程.

提示: FFT 的逆和 FFT 过程几乎一样, 但是需要使用 $\omega^{-1} \equiv 3 \pmod 5$, 而不是 $\omega = 2$. 并且我们需要在执行完算法之后乘上 $4^{-1} \pmod 5$ 进行归一化.

4. 利用 $\pmod 5$ 意义下的 FFT 来计算 $3x + 2x^2$ 和 $3 - x$ 的乘积 $\pmod 5$.