

# Homework #7

截止日期: 6月1日 0:00 之前

## 问题 #1

设  $G$  为一个无向图, 其拉普拉斯矩阵为  $L$ , 具有第二小的特征值  $\lambda_2$ 。从课堂上我们知道, 如果  $G$  是连通的, 则  $\lambda_2 > 0$ 。

- 通过分析所有与向量  $\mathbf{1}$  正交的测试向量  $x$  上的瑞利商 (Rayleigh quotient), 证明:
  - 当  $G$  是连通且无权图时, 有  $\lambda_2 \geq 1/\text{poly}(n)$ 。
  - 附加题: 证明更好的下界  $\lambda_2 \geq 1/O(rn) \geq 1/O(n^2)$ , 其中  $r$  为图的直径 (即图中顶点对之间的最大最短路径距离), 并且进一步证明当  $G$  是简单图时, 有  $\lambda_2 \geq d/O(n^2)$ 。
- 通过分析以下的图, 证明对于所有可能的  $r, d$  和  $n$ , (1a) 中的界  $1/O(rn)$  和  $d/O(n^2)$  都是紧的: 为简单起见, 假设  $(d+1)|n$ , 并且令  $k = n/(d+1)$ 。对于  $i = 1, \dots, n/k$ , 令  $H_i$  是完全图 (无自环), 其中有一条边  $(u_i, v_i)$  被移除。令  $G$  是由  $H_1, \dots, H_k$  的不相交并集形成的  $d$ -正则图, 并通过添加若干边  $(v_1, u_2), (v_2, u_3), \dots, (v_{k-1}, u_k), (v_k, u_1)$  将它们连接成一个环。

## 问题 #2

如果  $G$  是具有谱半径  $\alpha := \max\{\alpha_2, |\alpha_n|\}$  的  $d$ -正则无向图, 请证明:

- $G$  的最大独立集的大小最多为  $\alpha n/d$ 。

2.  $G$  的色数至少为  $d/\alpha$ 。

提示：可以使用 Expander mixing lemma.

### 问题 #3

考虑向图中插入一条边。证明或证否以下单调性：

1. 对于插入的任意一条边，任意两个顶点之间的 hitting time 都是单调的。
2. 任意固定顶点  $t$ 。从任意其他顶点到  $t$  的 hitting time 对于插入与  $t$  相连的边是单调的。
3. 对于插入的任意边，任意两个顶点之间的 commute time 是单调的。

### 问题 #4

考虑  $\mathbb{R}^2$  上的  $n$  个点  $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$ 。

我们想用直线  $y = ax + b$  来拟合这些点，并且希望达成以下目标

$$\text{minimize } \sum_{i=1}^n |y_i - (a + bx_i)|.$$

请写出一个线性规划来解决上面的问题。