

# Homework #5

## 问题 #1

对于实数对称矩阵, 请找出奇异值与特征值的关系. 这样的关系对于一般的矩阵成立吗?

## 问题 #2

回忆 PageRank 算法的运行过程. 输入一个有  $n$  个点的有向图  $G = (V, A)$ . PageRank 算法维护一个分数向量  $\mathbf{w} = \{w_i\}_{i \in V}$ .

- 一开始, 对每一个点  $i \in V$ ,  $i$  的分数  $w_i$  被初始化为  $\frac{1}{n}$ .
  - 算法之后迭代, 对于每一轮迭代
    1. 对于每个点  $i \in V$ , 将  $w_i$  平均分开, 分别发送给  $i$  指向的邻居.
    2. 对于每个点  $j \in V$ , 将  $w_j$  重新设置为收到的分数之和.
    3. (random restart) 对每个点  $j \in V$ , 令  $w_j = \frac{3}{4}w_j + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{n}$ .
  - 算法一直运行直到收敛, 最终的  $w_i$  就是每个点  $i$  的 PageRank.
1. 考虑无向的 3-star, (即  $G = (\{1, 2, 3, 4\}, \{1 \rightarrow 2, 1 \rightarrow 3, 1 \rightarrow 4\})$ ), 计算每个点的 PageRank.
  2. 考虑有向的 3-cycle, (即  $G = (\{1, 2, 3\}, \{1 \mapsto 2, 2 \mapsto 3, 3 \mapsto 1\})$ ), 一开始初始化  $w_1 = 1, w_2 = 0, w_3 = 0$  (不是均匀初始化), 计算每个点的 PageRank.
  3. 假设给定的有向图  $G$  是不可约, 非周期的, 问: 一个顶点的 PageRank 的分数, 是否只与该顶点的入度 (in degree, 即有多少边指向该顶点) 有关? 试证明, 或者找出反例.

4. 考虑随机游走的转移矩阵, 它的最大特征值可以多大?

### 问题 #3

证明或证伪, 若一个矩阵的行列式接近于 0 (但是不等于 0), 则它的条件数一定非常大 (即, 矩阵接近于不可逆)。

(HINT: 可以从  $2 \times 2$  的对角矩阵开始研究, 它的行列式和条件数分别是什么?)

### 问题 #4

如果矩阵  $A$  的特征值的绝对值最大的恰有两个, 分别是  $\lambda_1, \lambda_2$ .

1. 如果  $\lambda_1 = \lambda_2$ , 幂迭代 (power method) 能找到某一个最大特征值对应的特征向量么?
2. 如果  $\lambda_1 = -\lambda_2$ , 不妨设  $\lambda_1 > 0$ , 幂迭代能找到  $\lambda_1$  对应的特征向量么?