

## Homework #6

截止日期: 5 月 28 日 23:59 之前

### 问题 #1 (Hall's drawing)

(1) 考虑把图画在一条线上, 我们使用非零单位向量  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ ,  $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$  表示一种画法:  $x_i$  代表点  $i$  画在  $\mathbb{R}$  上的位置。我们的目标是最小化  $\mathbf{x}^\top L \mathbf{x} = \sum_{ij \in E} (x_i - x_j)^2$ , 其中  $L$  是图的 Laplacian 矩阵; 注意到  $\mathbf{x} + \mathbf{1}$  是等价于  $\mathbf{x}$  的 (仅仅是做了一个平移,  $\mathbf{1}$  是全 1 向量), 因此不妨考虑  $\langle \mathbf{x}, \mathbf{1} \rangle = 0$  的答案。请用  $L$  的特征向量写出这样的  $\mathbf{x}$ 。

(2) 如果想把图画在平面上, 假设我们使用非零单位向量  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$  来表示一种画法:  $(x_i, y_i)$  代表点  $i$  画在平面  $\mathbb{R}^2$  上的位置。我们的目标是最小化一个类似的 2-范数:  $\sum_{ij \in E} \|(x_i, y_i) - (x_j, y_j)\|_2^2$ ; 类似地, 不失一般性地可以假设  $\langle \mathbf{1}, \mathbf{x} \rangle = 0$  和  $\langle \mathbf{1}, \mathbf{y} \rangle = 0$ 。请用  $L$  的特征向量写出这样的  $\mathbf{x}$  和  $\mathbf{y}$ 。如果额外地要求  $\mathbf{x}$  与  $\mathbf{y}$  是正交的话, 你的答案会有什么变化?

### 问题 #2

设  $A$  是一个无向图的邻接矩阵,  $\alpha_1$  是它的最大特征值。

1. 我们在课上证明了  $\alpha_1 \leq d_{\max}$ 。你能否证明  $\alpha_1 \geq d_{\text{avg}}$ ? 这里  $d_{\text{avg}} := \frac{|E|}{|V|}$  表示图的平均度数。
2. 图的色数 (chromatic number)  $\chi(G)$ , 是给所有顶点着色, 使得任意两个相邻的顶点颜色不同的所有着色方案中, 所需的最小颜色数。证明  $\chi(G) \leq \lfloor \alpha_1 \rfloor + 1$ 。你能否设计一个算法来产生这样的着色方案?

### 问题 #3

对  $n$  个顶点的无向完全图上每个顶点加上一个自环，记为图  $G$ 。注意此时每个顶点的度数均为  $n$ 。回顾拉普拉斯矩阵的定义为  $L = D - A$ 。其中  $D$  为对角线上是度数的矩阵， $A$  为邻接矩阵。

1. 请写出  $G$  上随机游走的转移矩阵  $P$ ，以及  $P$  的所有特征值和特征向量。
2. 请写出随机游走在  $G$  上的稳态分布。
3. 试求随机游走在  $G$  上的混合时间 (mixing time)。

### 问题 # 4

对任意给定的一个  $n$  个顶点的无向图  $G$ ，考虑其拉普拉斯矩阵  $L = D - A$ 。其中  $D$  为对角线上是度数的矩阵， $A$  为邻接矩阵。

1. 对于任意给定的  $k$  个两两互不相同的、非零的实数  $\lambda_i$ ，设多项式  $p$  满足

$$\forall i, 1 \leq i \leq k, \lambda_i p(\lambda_i) = 1.$$

请证明：次数最多为  $k - 1$  次的多项式中有且只有一个满足条件的  $p$ 。

2. 假设拉普拉斯矩阵  $L$  的有  $k$  个两两互不相同的、非零的特征值。请证明：存在次数最多为  $k - 1$  次的多项式  $p$  使得  $p(L)$  是  $L$  的伪逆 (pseudo-inverse)。换言之， $\forall \vec{x} \in \mathbb{R}^n, \vec{x} \perp \vec{1}$ ，都有  $Lp(L)\vec{x} = \vec{x}$ 。（提示：研究矩阵  $Lp(L)$  的特征值）
3. 回顾  $L$  的第二小特征值  $\lambda_2 = 0$  当且仅当图  $G$  是不连通的。假设  $\lambda_2 = 0$ 。试设计一个算法，它的输入是  $\lambda_2$  对应的特征向量  $v_2$ ，输出是  $G$  的两个互不连通的顶点集  $V_1, V_2$ 。