

Homework #5

截止日期: 5 月 4 日 0:00 之前

问题 #1

对于实数对称矩阵, 请找出奇异值与特征值的关系. 这样的关系对于一般的矩阵成立吗?

问题 #2

回忆 PageRank 算法的运行过程. 输入一个有 n 个点的有向图 $G = (V, A)$. PageRank 算法维护一个分数向量 $w = \{w_i\}_{i \in V}$.

- 一开始, 对每一个点 $i \in V$, i 的分数 w_i 被初始化为 $\frac{1}{n}$.
 - 算法之后迭代, 对于每一轮迭代
 1. 对于每个点 $i \in V$, 将 w_i 平均分开, 分别发送给 i 指向的邻居.
 2. 对于每个点 $j \in V$, 将 w_j 重新设置为收到的分数之和.
 3. (random restart) 对每个点 $j \in V$, 令 $w_j = \frac{3}{4}w_j + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{n}$.
 - 算法一直运行直到收敛, 最终的 w_i 就是每个点 i 的 PageRank.
1. 考虑无向的 3-star, (即 $G = (\{1, 2, 3, 4\}, \{1 \rightarrow 2, 1 \rightarrow 3, 1 \rightarrow 4\})$), 计算每个点的 PageRank.
 2. 考虑有向的 3-cycle, (即 $G = (\{1, 2, 3\}, \{1 \mapsto 2, 2 \mapsto 3, 3 \mapsto 1\})$), 一开始初始化 $w_1 = 1, w_2 = 0, w_3 = 0$ (不是均匀初始化), 计算每个点的 PageRank.

3. 假设给定的有向图 G 是不可约, 非周期的, 问: 一个顶点的 PageRank 的分数, 是否只与该顶点的入度 (in degree, 即有多少边指向该顶点) 有关? 试证明, 或者找出反例.
4. 考虑随机游走的转移矩阵, 它的最大特征值可以多大?

问题 #3

证明或证伪, 若一个矩阵的行列式接近于 0 (但是不等于 0), 则它的条件数一定非常大 (即, 矩阵接近于不可逆)。

(HINT: 可以从 2×2 的对角矩阵开始研究, 它的行列式和条件数分别是什么?)

问题 #4

如果矩阵 A 的特征值的绝对值最大的恰有两个, 分别是 λ_1, λ_2 .

1. 如果 $\lambda_1 = \lambda_2$, 幂迭代 (power method) 能找到某一个最大特征值对应的特征向量么?
2. 如果 $\lambda_1 = -\lambda_2$, 不妨设 $\lambda_1 > 0$, 幂迭代能找到 λ_1 对应的特征向量么?