Homework #4 & Take-home midterm

截止日期：4 月 20 日 0:00 之前

问题 #1

令 $d \geq 1$ 为一个整数, 令 T_d 为 d 阶的切比雪夫多项式.

1. 请证明在 $[-1,1]$ 上的无穷范数的意义下, $x^d - \frac{1}{2^{d-1}}T_d(x)$ 是 x^d 的最优的 $d-1$ 阶近似, 其中, $[-1,1]$ 上的无穷范数定义如下:

$$\|p\|_\infty = \sup_{x\in[-1,1]} |p(x)|\,.$$

2. 给定一个 d 次多项式, $p(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_dx^d$, 请给出在 $[-1,1]$ 上的无穷范数意义下, $p(x)$ 的最优 $d-1$ 阶近似.

问题 #2

对任意多项式 f, g, 考虑内积

$$\langle f, g\rangle := \int_{-1}^{1} f(x)g(x)\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}},$$

利用该内积, 可以定义范数 $\|f\| := \sqrt{\langle f, f\rangle}$.

现在令 T_n 表示 n 阶切比雪夫多项式. 对于 $d > 1$, 请找出 $a_0, a_1, \cdots, a_{d-1}$ 使得 $\|T_d - (a_0T_0 + a_1T_1 + \cdots + a_{d-1}T_{d-1})\|$ 最小.

提示: 切比雪夫多项式关于这个内积正交.

问题 #3

令 $|\cdot|$ 是一个向量范数, 由 $|\cdot|$ 导出的矩阵范数 $\|\cdot\|$ 定义为

$$\|A\| = \sup_x \frac{|Ax|}{|x|}.$$

请验证 $\|\cdot\|$ 具有相容性 (sub-multiplicative), 即对任意矩阵 $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$, 有

$$\|AB\| \le \|A\| \, \|B\| .$$

问题 #4

注意到 $e^x = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^i}{i!}$. 对于矩阵 $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, 我们同样可以定义 $e^A = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{A^i}{i!}$.

1. 请证明, 如果 $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ 可交换 $(AB = BA)$, 那么有 $e^A e^B = e^B e^A$.
2. (附加题) 请证明 $e^A e^B = e^{(A+B)}$.

问题 #5

请找一个 $x_k = Ax_{k-1} + b$ 收敛, 但是 A 的谱半径大于 1 的例子, 要求 $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$. 请指出你的例子中, 矩阵 A, 向量 x_0, 不动点向量 $x^*(\neq x_0)$, 和向量 b 分别是什么.

或者, 请证明这样的例子不存在.

问题 #6

考虑共轭梯度法解 $Ax = b$ (A 是正定矩阵). 共轭梯度法使用的是 A-norm, 定义为

$$\|x\|_A := \sqrt{x^\top Ax}.$$

1. 考虑共轭梯度法的第一步, 请找出 $x_1 \in \mathrm{span}\{b\}$, 使得 $\|x_1 - x_*\|_A$ 最小.
2. 如果将共轭梯度法中的 A-norm 换成 2-norm, 推导出来的 x_1 是什么 (用 b 和 x_* 表示即可)? 为什么 2-norm 下面的 x_1 不好计算而 A-norm 下的 x_1 容易计算?

问题 #7

令 A 是一个实对称矩阵且谱半径小于 1. 请证明 $2I + 2A + A^2$ 的条件数至多为 5 (只考虑由 2-norm 定义的条件数).

问题 #8

对于布尔函数 $f, g : \{-1, +1\}^n \to \{-1, +1\}$, 考虑内积

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{2^n} \sum_{x \in \{-1,+1\}^n} f(x)g(x).$$

对于 $S \subseteq [n]$, S 上的 parity function 也是一个布尔函数, 定义为

$$X_S(x) := \prod_{i \in S} x_i.$$

请证明所有的 parity function, 即 $\{X_S \mid S \subseteq [n]\}$, 在该内积下, 两两正交.

问题 #9

给定多项式 $g(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i x^i$, 保证 $g(x)$ 只有实数根. 令 λ_1 为 g 的最大的根. 假设从某个点 $x^{(0)}$ 开始运行牛顿迭代法, 得到 $x^{(0)}, x^{(1)}, x^{(2)}, \cdots$. 请证明, 对于 $k = O(n \log \frac{1}{\varepsilon})$, 牛顿法找到的 $x^{(k)}$ 满足

$$\lambda_1 \leq x^{(k)} \leq \lambda_1 + \varepsilon \cdot \left(x^{(0)} - \lambda_1 \right).$$

问题 #10 (Cubic Hermite interpolation)

在计算机图形学中, 三次插值是一个常用的绘制曲线的办法. 直观来说, 绘制这种曲线时, 不仅需要指定曲线的端点, 还需要指定曲线在每个端点处的切线.

1. 假设 $P(t)$ 是如下的三次多项式:

$$P(t) := at^3 + bt^2 + ct + d.$$

请写出一个关于 a, b, c, d 的线性条件, 使得对于固定的 h_0, h_1, h_2 和 h_3, $P(t)$ 满足如下的条件:

$$P(0) = h_0 \quad P'(0) = h_2 \tag{1}$$

$$P(1) = h_1 \quad P'(1) = h_3. \tag{2}$$

2. 请写出一组三次多项式的 “cubic Hermite” 基 $\{\phi_0(t), \phi_1(t), \phi_2(t), \phi_3(t)\}$, 使得对于任意满足 (1) 的多项式 P 都可以被写成如下形式:

$$P(t) = h_0\phi_0(t) + h_1\phi_1(t) + h_2\phi_2(t) + h_3\phi_3(t).$$