



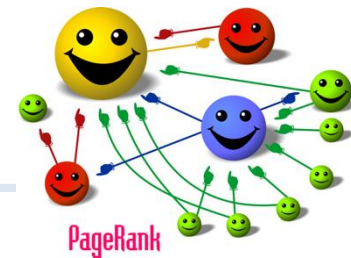
# 计算方法

刘景铖

计算机软件新技术国家重点实验室  
南京大学



# 谱图理论 (Spectral graph theory)



## Spectral theory

eigenvalues + eigenvectors + related linear algebra

### Graph structures

- Connectedness
- Coloring / Clustering
- Mixing of random walks
- Expander graphs

### In Theoretical CS

- Pagerank
- Sparsification
- Solving linear systems
- Counting / Sampling
- Expander codes
- Hardness of approximation
- Derandomization
- Max flow and more

### And Beyond

- Image segmentation
- Electrical networks
- Reliable / Efficient networks
- Epidemic modelling
- [Economic networks](#)



# 矩阵的幂

回顾已经多次出现的矩阵的幂

- 对于可以对角化的矩阵 $A$ ，收敛只需要特征值的幂是收敛的（特别地，谱半径 $\rho(A) = 1$ 也有可能是收敛的）

$$\begin{aligned}x &= \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_n v_n \\A^k x &= \lambda_1^k \alpha_1 v_1 + \lambda_2^k \alpha_2 v_2 + \cdots + \lambda_n^k \alpha_n v_n\end{aligned}$$

- 但一般来说，可能需要使用：谱半径 $\rho(A) < 1$ 当且仅当 $\lim_{k \rightarrow \infty} A^k = 0$

– 课后练习：考虑 $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ 的特征值？ $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^k = ?$

– 注意：随机游走的转移矩阵一定不会是 $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ，对应的只会是 $\begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

- 随机游走： $\vec{p}_{t+1} = \vec{p}_t \cdot P$ ，转移矩阵 $P := D^{-1}A$ ，及其相似的对角阵 $W = D^{-\frac{1}{2}}AD^{-\frac{1}{2}}$ 
  - 这门课：马尔可夫链基本定理在无向图上成立：对于连通的，非二分图，存在唯一的稳态分布，且会收敛
  - 完整证明可参照Olle Häggström的Finite Markov chains and algorithmic applications



# Complexity of Linear algebra

All the following can be solved in  $\tilde{O}(n^\omega)$  arithmetic operations:

- Matrix multiplication
- Matrix inverse
- Determinant
- Characteristic polynomial
- Solving linear equations  $Ax = b$
- Singular value decomposition
- Eigen-decomposition of symmetric matrices

In fact, almost linear time (in theory) for matrices that we will care about..



## Graph spectrum

考虑图的邻接矩阵，它的代数性质（如特征值与特征向量）能否与图本身的组合性质（连通性，是否二分图）相对应？

图的邻接矩阵的例子：完全图  $A = J - I = \vec{1} \vec{1}^T - I$

$J$  的特征值和特征向量是什么？

$$J \vec{1} = n \vec{1}$$



## Largest eigenvalue of adjacency matrix

图的邻接矩阵  $A$  的最大特征值  $\alpha_1$  满足

$$d_{\text{avg}} \leq \alpha_1 \leq \text{deg}_{\text{max}}(G)$$

证明: 设  $v$  为对应最大特征值的特征向量, 有  $Av = \alpha_1 v$

令  $v_j = \max_i v_i > 0$ , 则  $(Av)_j = (\alpha_1 v)_j$

$$\Rightarrow \alpha_1 v_j = \sum_i A_{j,i} v_i \leq \text{deg}_{\text{max}}(G) \cdot v_j$$

$$\Rightarrow \alpha_{\text{max}} \leq \text{deg}_{\text{max}}(G)$$

**Remark.** 同样的思路可以证明:

对连通的图  $G$ ,  $\alpha_1 = d_{\text{max}}$  iff  $G$  是正则图



# Graph spectrum

考虑图的邻接矩阵，它的代数性质（如特征值与特征向量）能否与图本身的组合性质相对应？

图的邻接矩阵的例子：二分图 (2-colorability)

- 引理：对于二分图 $G$ ，如果 $\alpha$ 是 $A(G)$ 的一个特征值，且重数为 $k$ ，那么 $-\alpha$ 也是 $A(G)$ 的一个特征值，重数也是 $k$
- 特征值的重数(multiplicity)
  - 代数重数(algebraic multiplicity): 特征多项式里面，根的重复次数
  - 几何重数(geometric multiplicity): 特征值对应的特征空间的维度
  - 对于可对角化的矩阵（特别地，对于无向图的邻接矩阵，它们是一样的）



# Graph spectrum

引理：对于二分图 $G$ ，如果 $\alpha$ 是 $A(G)$ 的一个特征值，且重数为 $k$ ，那么 $-\alpha$ 也是 $A(G)$ 的一个特征值，重数也是 $k$

证明：把 $A$ 表示为
$$U \begin{bmatrix} U & V \\ 0 & B \end{bmatrix} V \begin{bmatrix} B^T & 0 \end{bmatrix}$$

假设 $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ 是 $A$ 的一个特征向量，对应特征值为 $\alpha$ ：

$$\begin{pmatrix} By \\ B^T x \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & B \\ B^T & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

因此 $B^T x = \alpha y, By = \alpha x$ 。再考虑 $\begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix}$

$$A \begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & B \\ B^T & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -By \\ B^T x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\alpha x \\ \alpha y \end{pmatrix} = -\alpha \begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix}$$

因此 $-\alpha$ 也是 $A$ 的特征值

最后，注意到： $\alpha$ 的重数为 $k \Leftrightarrow$ 存在 $k$ 个线性无关的特征向量对应的特征值 $\alpha$

对每一个分别取反后依然是线性无关的，因此 $-\alpha$ 的重数也为 $k$



# Graph spectrum

事实上，引理的反方向也是对的。

引理：设 $A(G)$ 的特征值为 $\alpha_1 \geq \alpha_2 \geq \dots \geq \alpha_n$ ，如果 $\forall i, \alpha_i = -\alpha_{n-i+1}$ ，那么 $G$ 一定是二分图

证明：首先注意：对于任意奇数 $k, \sum_i \alpha_i^k = 0$

$A$ 的特征值为 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 则 $A^k$ 的特征值为 $\alpha_1^k, \alpha_2^k, \dots, \alpha_n^k$ ，因此对于任意奇数 $k$ ，

$$\text{trace}(A^k) = \sum_i \alpha_i^k = 0$$

组合含义： $(A^k)_{i,j}$  = 长度为 $k$ 的从 $i$ 到 $j$ 的行走方案的数目

$$\text{trace}(A^k) = \sum_i (A^k)_{i,i} = 0, \text{ 又因为 } (A^k)_{i,i} \geq 0, \text{ 所以 } (A^k)_{i,i} = 0$$

即，对于任意奇数 $k$ ，长度为 $k$ 的环路不存在。因此，一定是二分图



# Laplacian matrix

给定图 $G$

- 邻接矩阵 $A(G)$

$$A_{u,v} = 1 \text{ iff } uv \in E$$

- 拉普拉斯矩阵:  $D(G)$ 是对角线上为度数的矩阵

$$L(G) := D(G) - A(G)$$

对于 $d$ -正则图,  $L(G) = dI - A(G)$ 。因此正则图的拉普拉斯矩阵和邻接矩阵的特征空间是一样的  
但一般图上并不成立, 这一区别非常重要

可以写出 $L(G) = \sum_{e \in E} L_e$ , 其中 $L_e$ 是只有 $e$ 这一条边的图的拉普拉斯矩阵  $L_e = b_e b_e^T$

$$L_e = \begin{pmatrix} & u & & v & \\ & \vdots & & \vdots & \\ \cdots & 1 & \cdots & -1 & \cdots \\ & \vdots & & \vdots & \\ \cdots & -1 & \cdots & 1 & \cdots \\ & \vdots & & \vdots & \end{pmatrix} \begin{matrix} u \\ v \end{matrix}$$



# Laplacian matrix

给定图 $G$ ，它的拉普拉斯矩阵 $L(G)$ 定义为

$$L(G) := D(G) - A(G) = \sum_{e \in E(G)} L_e = \sum_{e \in E(G)} b_e b_e^\top$$

性质： $\vec{1}$  是 $L(G)$ 的一个特征向量，对应特征值是0

证明： $L(G)$ 每行加起来为0.

性质： $L(G) \succcurlyeq 0$

证明： $x^\top L x = \sum_e x^\top b_e b_e^\top x = \sum_e (x_u - x_v)^2 \geq 0$

因此， $L(G)$ 是半正定矩阵，且最小特征值为0



# Connectedness

**定理：** 给定图 $G$ ，它是连通的当且仅当 $L(G)$ 特征值0的重数为1

**证明( $\Leftarrow$ ):** 先考虑 $G$ 是不连通的情况。此时我们需要证明 $L(G)$ 的特征值0的重数大于1.

$$L(G) = \begin{matrix} & V_1 & V_2 \\ \begin{matrix} V_1 \\ V_2 \end{matrix} & \begin{bmatrix} L(G_1) & 0 \\ 0 & L(G_2) \end{bmatrix} \end{matrix}$$

有2组线性无关的特征向量，对应特征值为0



# Connectedness

**定理:** 给定图 $G$ , 它是连通的当且仅当 $L(G)$ 的特征值0的重数为1

证明( $\Rightarrow$ ): 接下来考虑 $G$ 是连通的。假设 $Lx = 0$ , 则 $x^T Lx =$

$$\sum_{ij \in E} (x_i - x_j)^2 = 0$$

因此  $(x_i - x_j)^2 = 0, \forall ij \in E$ , 即  $x_i = x_j, \forall ij \in E$

因为  $G$ 是连通的, 所以也有  $x_i = x_j, \forall i, j \in V$

因此  $x = c \vec{1}$



## Second eigenvalue

把 $L(G)$ 的特征值记为 $0 = \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n$

刚刚的定理证明了： $G$ 是非连通的当且仅当 $\lambda_2 = 0$

或者说： $G$ 是连通的当且仅当 $\lambda_2 > 0$

更一般地（课后练习）：

$\lambda_k = 0$ 当且仅当 $G$ 有至少 $k$ 个连通分量。



## 推广 I: Perron-Frobenius定理

设 $A$ 是非负的，不可约且非周期的矩阵（不一定对称）。

1. 最大特征值的重数是1
2. 对应的特征向量中，每个维度都是非零且同号的
3.  $|\lambda_i| < \lambda_1$ , 对于  $2 \leq i \leq n$ .

证明可参见：“Algebraic graph theory” Chapter 8, by  
Godsil and Royle



## 推广 II: Robust connectedness

连通性和二分图在组合上也非常容易刻画，为什么需要特征值？

事实上，可以更加量化特征值的刻画：

- $\lambda_2$  非常小，当且仅当  $G$  非常接近于不连通(i.e. 存在非常稀疏的割).
- $\lambda_k$  非常小，当且仅当  $G$  非常接近于存在  $k$  个连通分量(i.e.  $k$  个不相交的非常稀疏的分割).
- 对于邻接矩阵的特征值  $\lambda_n \approx -\lambda_1$  当且仅当  $G$  中存在接近于二分的分量



# Graph conductance

Recall that  $G$  is disconnected if and only if  $\lambda_2 = 0$ .

**Cheeger's inequality** will show that  $G$  is “close” to be disconnected if and only if  $\lambda_2$  is “small”.

We will first define precisely what it means to be close to be disconnected.

The **conductance** of a set  $S \subseteq V$  is defined as

$$\phi(S) := \frac{|\delta(S)|}{\text{vol}(S)},$$

where  $\text{vol}(S) := \sum_{v \in S} \deg(v)$ .

When the graph is  $d$ -regular,  $\phi(S) := \frac{|\delta(S)|}{d|S|}$ .

Note: the **expansion** of a set  $S$  is defined as  $\frac{|\delta(S)|}{|S|}$ ; For  $d$ -regular graphs, they're basically the same.

The conductance of a graph  $G$  is defined as  $\phi(G) := \min_{S: \text{vol}(S) \leq m} \phi(S)$ .

Note that  $0 \leq \phi(G) \leq 1$ .



# Expander graphs and sparse cuts

A graph  $G$  with constant  $\phi(G)$  (e.g.  $\phi(G) = 0.1$ ) is called an expander graph.

A set  $S$  with small  $\phi(S)$  is called a sparse cut.

Both concepts are very useful.

Finding a sparse cut is useful in designing divide-and-conquer algorithms, and have applications in

- image segmentation
- data clustering
- community detection
- VLSI-design
- ....



# Spectral partitioning algorithm

A popular heuristic used in practice.

1. Compute an eigenvector  $x \in \mathbb{R}^n$  corresponding to the second smallest eigenvalue of  $\mathcal{L}$ .
2. Sort the vertices so that  $x_1 \geq x_2 \geq \dots \geq x_n$ .

3. Let  $S_i := \begin{cases} \{1, \dots, i\} & \text{if } i \leq \frac{n}{2} \\ \{i + 1, \dots, n\} & \text{if } i \geq \frac{n}{2} \end{cases}$

Return  $\min_{1 \leq i \leq n} \phi(S_i)$ .

This is simple and can be implemented in near-linear time.

It performs very well in practice, especially in image segmentation.



# Normalized matrices

To state Cheeger's inequality nicely, we introduce normalized adjacency and Laplacian matrices.

Let  $\mathcal{A} = D^{-\frac{1}{2}}AD^{-\frac{1}{2}}$  be the normalized adjacency matrix.

Let  $\mathcal{L} = D^{-\frac{1}{2}}LD^{-\frac{1}{2}}$  be the normalized Laplacian matrix.

Note that  $\mathcal{L} = I - \mathcal{A}$ .

When the graph is  $d$ -regular,  $\mathcal{A} = \frac{1}{d}A$  and  $\mathcal{L} = \frac{1}{d}L$ .

**Claim.** Let  $\alpha_1 \geq \dots \geq \alpha_n$  be the eigenvalues of  $\mathcal{A}$ , and  $\lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_n$  be the eigenvalues of  $\mathcal{L}$ .

Then,  $1 = \alpha_1 \geq \dots \geq \alpha_n \geq -1$ , and  $0 = \lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_n \leq 2$ .



# Cheeger's inequality

**Cheeger's Inequality** [Cheeger 70, Alon-Milman 85]

$$\frac{\lambda_2}{2} \leq \phi(G) \leq \sqrt{2\lambda_2}$$

The first inequality is called the easy direction, and the second inequality is called the hard direction. We give some intuition in the case when  $G$  is a  $d$ -regular graph.

**For the easy direction:** think of  $\lambda_2$  as a “relaxation” of the graph conductance problem.

$$\phi(G) \approx \min_{x \perp 1 : x \text{ is binary}} \frac{\sum_{ij \in E} (x_i - x_j)^2}{d \sum_{i \in V} x_i^2} \quad \text{and} \quad \lambda_2 = \min_{x \perp 1} \frac{\sum_{ij \in E} (x_i - x_j)^2}{d \sum_{i \in V} x_i^2}.$$

**For the hard direction:** given an optimizer  $x$  for  $\lambda_2$ , we want to produce a set  $S$  with  $\phi(S) \leq \sqrt{2\lambda_2}$ . The idea is to use the spectral partitioning algorithm: for a “fractional”  $x$ , we try to round it to an integral (binary) solution  $x$ . This is known as “rounding”.



# 回顾：无向图上的马尔可夫链基本定理

是否不管从任意  $p_0$  出发，都有  $p_t \rightarrow \vec{\pi} = \frac{\vec{d}}{2m}$ ?

不一定: 如果Markov chain是reducible（不连通），或者周期性的（周期不为1）

对于无向的连通图, 非周期性等价于非二分图

(To see why, recall what happens to an undirected 3-cycle)

无向图上的马尔可夫链基本定理如下:

**定理.** 对任意有限的, 连通的, 非二分图, 都有  $p_t \rightarrow \vec{\pi} = \frac{\vec{d}}{2m}$  随着  $t \rightarrow \infty$ , 与  $p_0$  的选取无关

由  $p_t = W^t p_0$ , 需要分析  $W$  的特征值分布



# 转移矩阵的谱分析

记  $W = AD^{-1}$  为随机游走的转移矩阵,  $Z = \frac{1}{2}I + \frac{1}{2}AD^{-1}$  为惰性随机游走的转移矩阵

要研究  $p_t = W^t p_0$ , 可以先分析  $W$  的特征空间

注意: 尽管  $A$  是对称的,  $W$  不一定是对称的

不过  $W$  与一个对称矩阵是相似的:  $D^{-\frac{1}{2}}WD^{\frac{1}{2}} = D^{-\frac{1}{2}}(AD^{-1})D^{\frac{1}{2}} = D^{-\frac{1}{2}}AD^{-\frac{1}{2}} = \mathcal{A}$

**定理.**  $W$  与  $\mathcal{A}$  拥有相同的特征值

注意:  $W$  不一定有两两正交的特征向量



# $d$ -regular graphs ( $d$ -正则图)

对于  $d$ -正则图, 有  $W = \frac{1}{d}A = I - \frac{1}{d}L$ , 记  $W$  的特征值为  $\alpha_1 \geq \alpha_2 \geq \dots \geq \alpha_n$ , 正交正归化的特征向量为  $v_1, v_2, \dots, v_n$

要研究  $p_t = W^t p_0$ , 可以把  $p_0 = c_1 v_1 + \dots + c_n v_n$  展开  
那么  $W^t p_0 = c_1 \alpha_1^t v_1 + c_2 \alpha_2^t v_2 + \dots + c_n \alpha_n^t v_n$

$W = \frac{1}{d}A = I - \frac{1}{d}L$  的特征空间:

- $1 \geq \alpha_1, \alpha_n \geq -1$
- $1 = \alpha_1$ , 对应的特征向量为  $\vec{1}$
- $\alpha_1 > \alpha_2$  当且仅当图是连通的
- $\alpha_1 = -\alpha_n$  当且仅当图是二分图 (课后练习)

可见连通性, 和非二分图的性质, 分别对应于  $\alpha_2 < 1$  和  $\alpha_n > -1$

这意味着, 对连通的非二分图,  $W^t p_0 \rightarrow c_1 v_1$  as  $t \rightarrow \infty$   
如果  $\alpha_2 < 1 - \epsilon$ , 并且  $\alpha_n > -1 + \epsilon$ , 则  $\epsilon$  越大, 收敛越快

Fundamental Theorem of Markov chain,  
for undirected graph!

$c_1 v_1$  是什么?

对于  $d$ -正则图,  $\vec{\pi} = \frac{\vec{d}}{2m} = \frac{1}{n} \vec{1}$  为特征值为 1 对应的特征向量, 因此  $v_1 = \frac{1}{\sqrt{n}} \vec{1}, c_1 = \langle p_0, v_1 \rangle = \frac{1}{\sqrt{n}} \langle p_0, \vec{1} \rangle = \frac{1}{\sqrt{n}}$   
因此  $c_1 v_1 = \frac{1}{n} \vec{1} = \vec{\pi}$



## Lazy Random Walks

要证明  $p_t = \left(\frac{1}{2}I + \frac{1}{2}AD^{-1}\right)^t p_0 \rightarrow \frac{\vec{d}}{2m}$  随着  $t \rightarrow \infty$ :

对  $d$ -正则图,  $W = \frac{1}{d}A$ ,  $Z = \frac{1}{2}I + \frac{1}{2d}A$

若  $W$  的特征值为  $\alpha_1 \geq \alpha_2 \geq \dots \geq \alpha_n$

则  $Z$  的特征值为  $1 = \frac{1+\alpha_1}{2} \geq \frac{1+\alpha_2}{2} \geq \dots \geq \frac{1+\alpha_n}{2} \geq 0$

(课后练习)

**定理.** 对有限的连通无向图, 随着  $t \rightarrow \infty$ ,  $p_t = \left(\frac{1}{2}I + \frac{1}{2}AD^{-1}\right)^t p_0 \rightarrow \frac{\vec{d}}{2m}$ , 不管从任何  $p_0$  出发.



# 混合时间 (Mixing time)

由fundamental theorem of Markov chain, 我们知道 $p_t \rightarrow \vec{\pi} = \frac{\vec{d}}{2m}$ 收敛, 收敛的速度?

回顾TV distance的定义:  $d_{\text{TV}}(p_t, \vec{\pi}) = \frac{1}{2} \|p_t - \vec{\pi}\|_1 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n |p_t(i) - \pi(i)|$

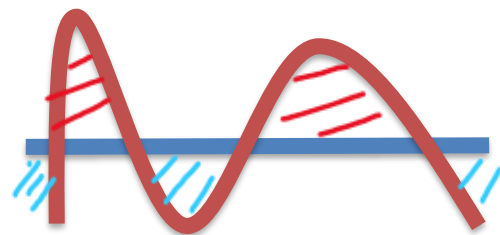
**定义.** Markov chain的 $\epsilon$ -混合时间定义为最小的时间 $t$ 使得

$$\|p_t - \vec{\pi}\|_1 \leq 2\epsilon \quad \forall p_0.$$

**观察:** 对任意  $[n]$  上面的概率分布 $p$ 和 $q$ , 令  $p(S) = \sum_{i \in S} p(i)$ ,  $q(S) = \sum_{i \in S} q(i)$ , 则有

$$d_{\text{TV}}(p, q) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n |p(i) - q(i)| = \max_{S \subseteq [n]} |p(S) - q(S)|$$

**定义.** 谱间隔(spectral gap)  $\lambda = \min\{1 - \alpha_2, 1 - |\alpha_n|\}$





# Mixing time (for d-regular graphs)

**定理.** 随机游走的 $\epsilon$ -混合时间最多为 $\frac{1}{\lambda} \log\left(\frac{n}{\epsilon}\right)$ , 其中 $\lambda = \min\{1 - \alpha_2, 1 - |\alpha_n|\}$ .

证明: 取 $v_1, v_2, \dots, v_n$ 为 $A$ 的一组正交正规特征向量的基。

设 $p_0 = c_1 v_1 + c_2 v_2 + \dots + c_n v_n$ , 则 $p_t = W^t p_0 = \underbrace{c_1 \alpha_1^t v_1}_{\pi} + c_2 \alpha_2^t v_2 + \dots + c_n \alpha_n^t v_n$

由Cauchy-Schwarz不等式,  $\|p_t - \pi\|_1 \leq \sqrt{n} \|p_t - \pi\|_2$

$$\begin{aligned} \|p_t - \pi\|_2^2 &= \|c_2 \alpha_2^t v_2 + \dots + c_n \alpha_n^t v_n\|_2^2 = c_2^2 \alpha_2^{2t} \|v_2\|_2^2 + \dots + c_n^2 \alpha_n^{2t} \|v_n\|_2^2 \\ &= c_2^2 \alpha_2^{2t} + \dots + c_n^2 \alpha_n^{2t} \leq (1 - \lambda)^{2t} (c_2^2 + \dots + c_n^2) \end{aligned}$$

注意到 $p_0$ 本身作为一个概率分布, 满足 $\|p_0\|_2^2 = \sum_i p_0(i)^2 \leq \sum_i p_0(i) = \|p_0\|_1 = 1$

因此  $\|p_t - \pi\|_2^2 \leq (1 - \lambda)^{2t} \Rightarrow \|p_t - \pi\|_1 \leq \sqrt{n} (1 - \lambda)^t \leq \sqrt{n} e^{-\lambda t}$

- 注: 非d-regular的情况下 $v_1, v_2, \dots, v_n$ 需要取作 $\mathcal{A}$ 的正交正规特征向量基, 会有额外 $\sqrt{n}$ 的损失
- 当spectral gap为常数时(i.e.  $\lambda = \Omega(1)$ ), 随机游走在 $O\left(\log \frac{n}{\epsilon}\right)$ 步内收敛.
- 对正则图且 $\lambda = \Omega(1)$ 时, 我们可以在 $O(\log n)$ 步内, 均匀随机采样到一个顶点.



## Mixing time and spectral gap

**定理.** 随机游走的 $\epsilon$ -混合时间最多为 $\frac{1}{\lambda} \log\left(\frac{n}{\epsilon}\right)$ , 其中  $\lambda = \min\{1 - \alpha_2, 1 - |\alpha_n|\}$

当谱间隔 (spectral gap) 为常数的时候, 随机游走在  $O\left(\log\frac{n}{\epsilon}\right)$  步内收敛

- 回忆PageRank, 亦可通过随机游走模拟

对于惰性随机游走, 谱间隔变为  $\frac{\lambda_2}{2}$ , 其中  $\lambda_2$  为归一化的拉普拉斯矩阵的第二特征值

直观上看, 谱间隔相当于描述了这个图有多么接近不连通的

回顾Cheeger's inequality, 有  $\lambda_2 \geq \frac{\phi(G)^2}{2}$

因此, Lazy random walk的 $\epsilon$ -混合时间最多为  $\frac{2}{\phi(G)^2} \log\frac{n}{\epsilon}$



# Cheeger's inequality

更加量化特征值的刻画:

- $\lambda_2$  非常小, 当且仅当 $G$  非常接近于不连通(i.e. 存在非常稀疏的割).
- $\lambda_k$  非常小, 当且仅当 $G$  非常接近于存在 $k$ 个连通分量(i.e.  $k$ 个不相交的非常稀疏的分割).

一些联系与高级应用:

- 在算法上, 可以通过特征空间的信息, 得到图的分割
- 在代数构造中, 亦可通过代数构造特征空间, 来得到对应的连通性比较好的图 (e.g. expander graph)
- 在分析随机游走的混合时间中, 可以通过分析图的连通性, 间接地分析谱间隔 (spectral gap), 进而使用组合数学来分析随机游走



# Cheeger's Inequality in Markov chains

It is interesting to see how Cheeger's inequality can be used.

When we want to bound  $\phi(G)$ , say in constructing expander graphs,  
we can come up with algebraic constructions and bound  $\lambda_2$  instead

When we want to bound  $\lambda_2$ , say in bounding the mixing time,  
we can analyze combinatorial problems and bound  $\phi(G)$  instead

An alternative perspective like this is exactly what makes it so powerful