Homework #4

截止日期：5 月 6 日 23:59 之前

问题 #1

1. 请给出函数 $f(x) = |x|$ 在区间 $[-1, 1]$ 上无穷范数意义下的最优线性近似多项式 $P_1(x) = ax + b$，即寻找 a, b 最小化 $\sup_{x\in[-1,1]} \big||x| - (ax+b)\big|$，并论证为何它是最优的。

2. 回顾切比雪夫多项式定义 $T_n(x) := \cos(n \arccos x)$，其中 $x \in [-1, 1]$。请严格证明：切比雪夫多项式 $T_n(x)$ 在区间 $[-1, 1]$ 上的一阶导数的最大绝对值恰好为 n^2。即证明：

$$\|T_n'\|_\infty = \max_{x\in[-1,1]} |T_n'(x)| = n^2$$

   HINT：利用 $\theta = \arccos x$ 考察内点 $(-1, 1)$ 处的导数上界，然后单独利用洛必达法则或极限计算端点 $x \to \pm 1$ 处的导数值。这一性质在数值分析中非常重要，它揭示了高次多项式在边界处可能出现剧烈的震荡或极大的斜率。事实上多项式中的最坏情况正是切比雪夫多项式。

问题 #2 (Polynomials and Error Correction)

在现代信息理论中，多项式不仅可以用来分享秘密，还能用来在带噪信道中纠错。一位情报员需要通过一个不稳定的通信频道向总部发送一段重要信息。信息被编码为一个 d 次多项式 $P(x)$。情报员选择了 n 个不同的点 $x_1, x_2, \ldots, x_n$（其中 $n > d$），并发送了 n 个数据对 $(x_i, P(x_i))$。然而，敌方能够截获这些数据，并篡改其中的 k 个 y_i 的值。接收方总部最终收到了这 n 个数据对 (x_i, y_i)，但不知道哪 k 个数据点被敌方篡改过。请证明：为了保

证总部无论在何种篡改情况下，都能够在理论上唯一地确定出原始的 d 次多项式 $P(x)$，发送的节点总数 n 与多项式次数 d 以及被篡改的节点数 k 之间必须满足如下不等式条件：

$$n \geq d + 2k + 1$$

HINT: 尝试反证法进行证明。假设总部收到了序列 (x_i, y_i)，假设存在两个不同的 d 次多项式 $P_1(x)$ 和 $P_2(x)$ 都最多只与接收到的序列有 k 个不一致的点。请考察这两个多项式在至少多少个节点上必须相等，从而导出矛盾。

问题 #3 (Matrix Iteration and Spectral Properties)

给定对称实矩阵 $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$，假设其特征值满足 $|\lambda_1| > |\lambda_2| > \cdots > |\lambda_n| > 0$。设 $v_1, \ldots, v_n$ 为对应于这些特征值的标准正交特征向量。

1. 考虑经典的幂法 (Power Method) 迭代公式 $x_{k+1} = \frac{Ax_k}{\|Ax_k\|_2}$。假设初始单位向量 x_0 与 v_1 不正交（即 $x_0^\top v_1 \neq 0$）。请证明：存在常数 $C > 0$，使得由迭代生成的向量序列收敛于主特征向量，且收敛速度满足界限：

$$\min_{\pm} \|x_k - (\pm v_1)\|_2 \leq C \left| \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right|^k$$

2. 如果我们希望迭代快速收敛到**第二大**特征值对应的特征向量 v_2，我们可以采用带位移的反幂法 (Inverse Iteration with Shift)：$x_{k+1} = c_k(A - \mu I)^{-1} x_k$，其中 c_k 为归一化常数。试分析当参数 μ 应当如何选取时该算法能够收敛到 v_2，并解释原因。

问题 #4 (Total Least Squares)

回顾最小二乘法，我们寻找 x 来最小化 $\|Ax - b\|_2$。这本质上假设了矩阵 A 是完全准确的，误差仅存在于向量 b 中。但在实际应用中，如果测量矩阵 A 同样含有噪声，总体最小二乘法 (Total Least Squares, TLS) 是一种更为严谨的替代方案。它要求解：

$$\min_{E,r} \|[E, r]\|_F \quad \text{s.t. } (A + E)x = b + r$$

其中矩阵 $E \in \mathbb{R}^{m \times n}$ 为矩阵 A 的扰动，$r \in \mathbb{R}^m$ 为 b 的扰动。

1. 考虑扩展矩阵 $\tilde{A} = [A, b] \in \mathbb{R}^{m\times(n+1)}$，并定义扩展向量 $\tilde{x} = \begin{bmatrix} x \\ -1 \end{bmatrix}$。证明 TLS 问题等价于寻找一个秩（Rank）不超过 n 的矩阵 $\tilde{B}$，使得 $\|\tilde{A} - \tilde{B}\|_F$ 最小化，且满足 $\tilde{B}\tilde{x} = \vec{0}$。

2. 假设 $m > n$，且 $\tilde{A}$ 的奇异值分解 (SVD) 为 $\tilde{A} = \sum_{i=1}^{n+1} \sigma_i u_i v_i^\top$。进一步假设 $\sigma_n > \sigma_{n+1} > 0$ 且右奇异向量 v_{n+1} 的最后一个分量不为 0。请利用 Eckart-Young-Mirsky 定理推导未知向量 x_{TLS} 的闭式解（用 v_{n+1} 的分量表达）。

问题 #5 (Matrix Norms Inequalities)

给定矩阵 $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$。我们通常使用不同的矩阵范数来衡量矩阵的尺度。

1. 请证明弗罗贝尼乌斯范数 (Frobenius norm) 和算子 2-范数之间满足如下不等式关系：

$$\|A\|_2 \leq \|A\|_F \leq \sqrt{\operatorname{rank}(A)}\|A\|_2$$

2. 设 A 为可逆方阵 ($m = n$)。证明由 2-范数诱导的矩阵条件数满足 $\operatorname{cond}_2(A) = \|A\|_2\|A^{-1}\|_2 \geq 1$。

3. 请证明对于任意矩阵 $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ 和 $B \in \mathbb{R}^{n\times p}$，下面的不等式成立：

$$||AB||_F \leq ||A||_F||B||_F$$

   HINT: 可能需要用到 Cauchy-Schwarz 不等式

4. 请证明对于任意矩阵 $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ 和 $B \in \mathbb{R}^{n\times p}$，下面的不等式成立：

$$\|AB\|_F \leq \|A\|_2\|B\|_F$$

   HINT：可以考虑将矩阵 B 按列分块 $B = [b_1, b_2, \ldots, b_p]$，并利用算子 2-范数的定义 $\|Ax\|_2 \leq \|A\|_2\|x\|_2$。

问题 #6

1. 给定矩阵 $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$，假设对 $A^\top A$ 的楚列斯基 (Cholesky) 分解有 $A^\top A = LL^\top$，其中 L 为下三角阵。考虑 $Q := A(L^\top)^{-1}$，请证明 Q 的列是正交的，并推导 $A^\top A$ 的楚列斯基 (Cholesky) 分解与 A 的 QR 分解之间的关系。

2. 给定矩阵 $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$，$m \le n$，它一定能被分解为 $A = RQ$，其中 R 为上三角阵，且 Q 为正交矩阵。请设计一个分解的方法，进而证明 $A = RQ$ 分解的存在性。

   HINT: 尝试修改 Gram-Schmidt 过程。

问题 #7

在信号降噪和机器学习中，我们常常遇到带有 L_1 或 L_2 范数（注意不是范数的平方）的无约束正则化问题。给定一个观测向量 $v \in \mathbb{R}^n$ ($v \neq \mathbf{0}$) 以及正则化参数 $\lambda > 0$。

1. 对于 L_1 正则化，试找出最小化 $\frac{1}{2}\|x-v\|_2^2 + \lambda\|x\|_1$ 的向量 x。HINT: 可以先尝试求解 $n = 1$ 的情况。

2. 下面讨论 L_2 正则化，我们需要求解以下最小化问题：

$$\min_{x\in\mathbb{R}^n} J(x) = \frac{1}{2}\|x-v\|_2^2 + \lambda\|x\|_2$$

   设 $x = ru$，其中 $r = \|x\|_2 \ge 0$ 是向量的模长，u 是单位方向向量（即 $\|u\|_2 = 1$）。

   请将目标函数 $J(x)$ 展开，用 r, u, v 表示。并证明：对于任意固定的模长 $r > 0$，当且仅当方向向量 $u = \frac{v}{\|v\|_2}$ 时，目标函数取得最小值。HINT: 可以考虑往该方向的投影，或利用 Cauchy-Schwarz 不等式

3. 将上述最优的 u 代回目标函数中，此时原问题退化为一个仅关于标量 r 的一元最优化问题。请写出这个关于 r 的函数 $f(r)$。

4. 求解函数 $f(r)$ 在区间 $r \in [0, +\infty)$ 上的最小值点 r^*。HINT: 需要分两种情况进行讨论：$\|v\|_2 \le \lambda$ 和 $\|v\|_2 > \lambda$.

5. 写出最优解向量 x^* 关于 v 和 λ 的最终分段表达式。

问题 #8 (Stability of sorting)

给定向量 $X = (X_1, \ldots, X_n)$, 它排序后的版本记作 $\text{sort}(X) = (X_{(1)}, \ldots, X_{(n)})$, 满足 $X_{(1)} \leq \ldots \leq X_{(n)}$. 考虑对 X 加入了一些噪声之后得到的向量 Y，同样记 Y 排序后的版本为 $\text{sort}(Y)$ 满足 $Y_{(1)} \leq \ldots \leq Y_{(n)}$.

注意噪声可能改变了元素的大小顺序.

1. 证明 $|X_{(1)} - Y_{(1)}| \leq \|X - Y\|_2$.
2. 证明 $|X_{(n)} - Y_{(n)}| \leq \|X - Y\|_2$.
3. 证明对所有 k, $|X_{(k)} - Y_{(k)}| \leq \|X - Y\|_2$.
4. 证明 $\|\text{sort}(X) - \text{sort}(Y)\|_1 \leq \|X - Y\|_1$.

问题 #9

一般来说，一个矩阵的秩是不连续的。事实上，可逆矩阵的集合在实数矩阵里面是一个稠密集。这就意味着，一个非满秩的矩阵，可以通过一个任意小的扰动使其变得满秩。这里研究一个相对更稳定的秩的定义，这样的稳定性让 Stable rank 作为 rank 的一个替代量在低秩矩阵近似的研究中得到广泛应用。

一个实矩阵 $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 的 stable rank 定义为

$$\text{STABLE-RANK}(A) \equiv \frac{\|A\|_F^2}{\|A\|_2^2}$$

1. 当矩阵 A 的列向量都等于 $\vec{v} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\vec{0}\}$ 时，证明 $\text{STABLE-RANK}(A) = 1$。
2. 当矩阵 A 的列向量是 orthonormal 时，证明 $\text{STABLE-RANK}(A) = n$。
3. 更一般的，证明 $1 \leq \text{STABLE-RANK}(A) \leq n$。
4. 证明 $\text{STABLE-RANK}(A) \leq \text{RANK}(A)$。