

Homework #8

截止日期：无

问题 #1

1. 通过最小二乘法找到的线性方程组的最优近似解是 ():
(A) 可能是唯一的; (B) 一定是唯一的;
(C) 一定是不唯一的.
2. 给定矩阵 $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, 请写出 A 的特征值, 特征向量, 2-条件数, 以及 $\|A\|_\infty, \|A\|_1$.

问题 #2

给定连通图 $G = (V, E)$, 且 $|V| > 2$. 回顾独立集的定义。如果一个集合 $S \subseteq V$ 满足: $\forall u \in S, v \in S$ 都有 $(u, v) \notin E$. 则称 S 为一个独立集。

1. 在最大独立集问题中, 你希望找到给定图上的最大独立集。请写出一个整数线性规划来解决这个问题。(变量应该只能取 $x_v \in \{0, 1\}$)
2. 请在你的整数线性规划中, 把整数限制 $x_v \in \{0, 1\}$, 替换为 $x_v \leq 1$. 证明: 在二分图中, 替换后所得到的线性规划最优解总是可以取到整数解。

HINT: 回顾在课堂上讲过的一个思路。尝试证明任意给定一个非整数的解, 它都不是线性规划的一个顶点。在课堂的例子中, 可以证明从任意一个非整数的变量出发, 一定可以不断地找出下一个非整数的变量, 直到形成一个偶数长度的圈。这里只找偶数长度的圈是不够的, 可以尝试推广这一思路。

3. 请写出这个线性规划的对偶形式。(答案中需包含：变量、约束、目标函数分别是什么?)