



计算方法

刘景铖

计算机软件新技术国家重点实验室
南京大学



补充: Cheeger's Inequality in Markov chains

It is interesting to see how Cheeger's inequality can be used.

When we want to bound $\phi(G)$, say in constructing expander graphs,
we can come up with algebraic constructions and bound λ_2 instead

When we want to bound λ_2 , say in bounding the mixing time,
we can analyze combinatorial problems and bound $\phi(G)$ instead

An alternative perspective like this is exactly what makes it so powerful



回顾

上节课: 无向图上的马尔可夫链基本定理
随机游走的混合时间 (mixing time) 与谱间隔
(spectral gap)

这节课: 电路电阻网络

“等效电阻” 距离

随机游走的碰撞时间 (Hitting time) 和遍历时间
(cover time)



回顾: Random walk on graphs

给定图 $G = (V, E)$

图上的随机游走:

- 从一个给定的顶点出发
- 接下来, 每一步都从当前顶点, 移动到一个均匀随机选取的邻居
- 不断重复

这个随机过程的“长期表现”是怎么样的呢?

1. 重复 t 步之后, 当前顶点是某个顶点 u 的概率是多少?
2. 是否存在一个极限的随机分布, 随机游走会收敛到它? (稳态)
3. 多久才会收敛? (混合时间, mixing time)
4. 从点 s 出发, 多久才会到达点 t ? (hitting time)
5. 多久才会遍历每个顶点至少一次? (遍历时间, cover time)



Why hitting time and cover time?

Hitting time: used a lot in designing randomized algorithm

- Finding bipartite matching
 - Use random walk to find an augmenting cycle
 - Interested in the first return time, in expectation
- 2SAT, and more generally in algorithmic Lovász local lemma
 - Basically a random walk over all assignments
 - Interested in the first time of hitting a satisfying assignment, in expectation
 - In discrepancy theory, one way to find a “balanced coloring” is to use [random walk](#)

Cover time: imagine you want to explore the graph

Using DFS/BFS, you need time $O(|E| + |V|)$ and space $O(|V|)$

What if we use random walk instead?

Space = $O(\log n)$, expected running time = cover time $\leq O(|V||E|)$

In fact, [U. Feige](#) showed that there is an entire spectrum of time-space trade-off:

For every s there is an algorithm using space s and time $\tilde{O}\left(\frac{|V||E|}{s}\right)$ that covers all vertices w.h.p.

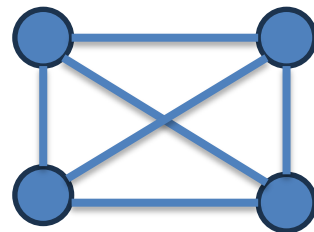
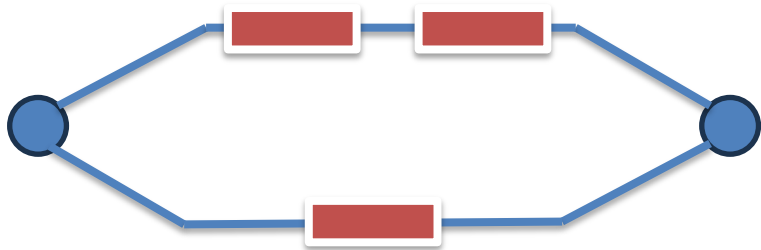


电路网络

给定一个无向图，每条边上有一个电阻，电阻值为 r_e 。

电路网络可以由基尔霍夫定律(Kirchhoff's law)和欧姆定律(Ohm's law):

- 基尔霍夫定律: 所有进入某节点的电流的总和，等于所有离开这节点的电流的总和
- 欧姆定律: 把节点的电压（电势）记为 $\phi: V \rightarrow \mathbb{R}$ ，则有 $\phi(u) - \phi(v) = i_{uv}r_{uv}$ ，其中 i_{uv} 是 u 到 v 的方向电流（特别地，有 $i_{uv} = -i_{vu}$ ）
- 如何计算电路网络？



Not every graph is [series-parallel](#)



电路网络的矩阵表示

给定电阻 r_e (或者电导率 $w_e = 1/r_e$)，如果从节点 s 注入 $1A$ 的电流，并且从节点 t 流出，如何求解/模拟电路网络内部的电流和电压？

更一般地，记 b_v 为 (从电路外部) 流入到节点 $v \in V$ 的方向电流

- $b_v > 0$ 意味着 (从外部) 注入电流
- $b_v < 0$ 意味着 (向外部) 流出的电流
- 除了源节点(source)和汇出节点(sink)，其它内部节点有 $b_v = 0$

翻译一下电流和电压需要遵循的定律:

- 基尔霍夫定律:

$$\sum_{u:vu \in E} i_{vu} = b_v, \quad \forall v \in V$$

对于每个节点
内部流出的电流=外部流入的电流

- 欧姆定律:

$$\phi(u) - \phi(v) = i_{uv} r_{uv} \Leftrightarrow i_{uv} = w_{uv} (\phi(u) - \phi(v))$$

两相合并可得:

$$b_v = \sum_{u:vu \in E} i_{vu} = \sum_{u:vu \in E} w_{uv} (\phi(v) - \phi(u)) = \deg_w(v) \phi(v) - \sum_{u:vu \in E} w_{uv} \phi(u)$$

其中 $\deg_w(v) = \sum_{u:vu \in E} w_{uv}$ 是节点 v 的加权的度数。特别地如果 $w_{uv} = 1$ ，有 $\vec{b} = L\vec{\phi}$



电路网络的矩阵表示

给定电阻 r_e (或者电导率 $w_e = 1/r_e$)，如果从节点 s 注入 $1A$ 的电流，并且从节点 t 流出，如何求解/模拟电路网络内部的电流和电压？

求解 $\vec{b} = L\vec{\phi}$!

计算出电压 $\vec{\phi}$ 之后，电流 $i_{uv} = w_{uv}(\phi(u) - \phi(v))$ 可直接由欧姆定律得出

考虑 incidence matrix B ，有 $\vec{i} = WB^T\vec{\phi}$ ，其中 W 为电导率组成的对角阵

事实上，拉普拉斯矩阵亦可以写成 $L = \sum_e w_e b_e b_e^T = BWB^T$

$\vec{b} = L\vec{\phi} = BWB^T\vec{\phi} = B\vec{i}$ ，基尔霍夫定律, **flow conservation**

注解：很多问题与电路网络的联系，正是从这些方程组开始

这些方程组什么时候有解？解是唯一的吗？



Pseudo-inverse of L

注意拉普拉斯矩阵 L 并不是满秩的, $L\vec{1} = \vec{0}$

所以 $L\vec{\phi} = \vec{b}$ 不一定有唯一的解

回顾: 如果图是连通的, 则 L 的第二小特征值严格大于0; 因此 L 的零空间 (nullspace) 完全由 $\vec{1}$ 张成。

引理: 如果存在向量 $\vec{\phi}$ 使得 $L\vec{\phi} = \vec{b}$, 则 $\vec{b} \perp \vec{1}$

证明: 假设 $\vec{\phi} = \sum_i c_i v_i$, 其中 $v_1 = \frac{1}{\sqrt{n}} \vec{1}$

则 $L\vec{\phi} = c_2 \lambda_2 v_2 + \dots + c_n \lambda_n v_n$

因此 $L\vec{\phi} \perp \vec{1}$

对于电路网络来说, 这也是合理的: 外部流入的电流与流出的电流相等



Pseudo-inverse of L

引理: 如果 $\vec{b} \perp \vec{1}$, 则存在向量 $\vec{\phi}$ 使得 $L\vec{\phi} = \vec{b}$

证明: 因为 $\vec{b} \perp \vec{1}$, 因此 $\vec{b} = \sum_{i=2}^n a_i v_i$

考虑 $\vec{\phi} = \sum_{i=2}^n \frac{a_i}{\lambda_i} v_i$, 可以验证 $L\vec{\phi} = \vec{b}$

因此 $L^\dagger := \sum_{i=2}^n \frac{1}{\lambda_i} v_i v_i^\top$ 是一个 pseudoinverse (伪逆):

- 任意向量 $\vec{b} \perp \vec{1}$ 都被映射到一个唯一的 $\vec{\phi}$ 使得 $L\vec{\phi} = \vec{b}$ 且 $\vec{\phi} \perp \vec{1}$
- $L\vec{\phi} = \vec{b}$ 全体解集为 $\{L^\dagger \vec{b} + c\vec{1} : c \in \mathbb{R}\}$, $L^\dagger \vec{b}$ 的所有“平移”
- 特别地, 如果固定一个节点的电压/电势 $\phi(v) = 0$, 有唯一解



Effective resistance (等效电阻)

节点 s 和 t 之间的等效电阻 $R_{\text{eff}}(s, t) := \phi(s) - \phi(t)$, 其中 $\vec{\phi}$ 满足 $L\vec{\phi} = \vec{b}$, \vec{b} 对应于从 s 到 t 发送1A电流的向量

相当于把整个图看成一个等效的大电阻的时候, 对应的等效的电阻

引理: $R_{\text{eff}}(s, t) = b_{st}^{\top} L^{\dagger} b_{st}$, 其中向量 $b_{st} \in \mathbb{R}^n$ 满足 $b_{st}(s) = 1, b_{st}(t) = -1$, 并且其它位置都为0



Energy (电势能)

$$\mathcal{E}(\vec{i}) := \sum_{e \in E} i_e^2 \cdot r_e$$

直观上，可以把整个网络看成从 s 到 t 的一个大电阻

定理. $\mathcal{E}(\vec{i}) = R_{\text{eff}}(s, t)$, 其中 i 是从 s 到 t 的单位电流.

证明: $\sum_{e \in E} i_e^2 \cdot r_e = \sum_e \frac{(\phi(u) - \phi(v))^2}{r_e} = \phi^\top L \phi$,

其中 ϕ 满足 $L\phi = b_{st}$, 因此 $\phi = L^\dagger b_{st}$

进而有 $\mathcal{E}(\vec{i}) = b_{st}^\top L^\dagger b_{st} = R_{\text{eff}}(s, t)$



Thompson's Principle

定理. $R_{\text{eff}}(s, t) \leq \mathcal{E}(\vec{g})$, 其中 \vec{g} 是任意 s - t 流.

为简单起见, 这里只考虑 $r_e = 1, \forall r_e$ 的情形

证明(sketch): 考虑 $\min \mathcal{E}(\vec{g}) = \min \sum_{e \in E} g_e^2, \text{ s.t. } B\vec{g} = b_{st}$

Optimality (KKT) requires that $\exists \phi \in \mathbb{R}^n \text{ s.t. } B^T \phi = \vec{g}$

即流 \vec{g} 是由某个电压向量 ϕ 通过 Ohm's law 确定的

因此 \vec{g} 是电流

结论: 单位 s - t 电流最小化所有能量



Thompson's Principle (另一个证明)

定理. $R_{\text{eff}}(s, t) \leq \mathcal{E}(\vec{g})$, 其中 \vec{g} 是任意 s - t 流.

为简单起见, 这里只考虑 $r_e = 1, \forall r_e$ 的情形

证明: 设 $\vec{g} = i + c$, 其中 i 为 s - t 的单位电流

首先注意到, \vec{g} 和 i 满足同样的基尔霍夫定律, 因此它们的差满足

$$\sum_{u:vu \in E} c_{vu} = 0, \quad \forall v \in V$$

另一方面

$$\mathcal{E}(\vec{g}) = \sum_{e \in E} g_e^2 = \sum_{e \in E} (i_e + c_e)^2 = \sum_{e \in E} i_e^2 + \sum_{e \in E} c_e^2 + 2 \sum_{e \in E} i_e c_e$$

接下来只需要证明 $\sum_{e \in E} i_e c_e = 0$, 便有 $\mathcal{E}(\vec{g}) \geq \sum_{e \in E} i_e^2 = R_{\text{eff}}(s, t)$

由于 i 为 s - t 的单位电流, 它还满足欧姆定律: $i_{uv} = \phi(u) - \phi(v)$

因此

$$\sum_{uv \in E} c_{uv}(\phi(u) - \phi(v)) = \sum_{uv \in E} c_{uv}\phi(u) + c_{vu}\phi(v) = \sum_v \sum_{u: uv \in E} c_{uv}\phi(u) = 0$$



单调性

定理. 如果 $\vec{r}' \geq \vec{r}$, 则有 $R_{\text{eff}, \vec{r}'}(s, t) \geq R_{\text{eff}, \vec{r}}(s, t)$.

证明: 设 \vec{i} 为电阻值 \vec{r} 的网络中从 s 到 t 的单位电流,
 \vec{i}' 为电阻值 \vec{r}' 的网络中从 s 到 t 的单位电流

$$R_{\text{eff}, \vec{r}}(s, t) = \mathcal{E}_{\vec{r}}(\vec{i}) \leq \mathcal{E}_{\vec{r}}(\vec{i}') \leq \mathcal{E}_{\vec{r}'}(\vec{i}') = R_{\text{eff}, \vec{r}'}(s, t)$$

这里第一个不等号使用了Thompson's principle;

第二个不等号使用了 $\vec{r}' \geq \vec{r}$ 以及 $\mathcal{E}_{\vec{r}}(\vec{i}) := \sum_{e \in E} i_e^2 \cdot r_e$



Edge-disjoint paths

例子：如果 s 到 t 之间有 k 条“边不相交”的路径，
每个路径长度最多为 l ，那么 $R_{\text{eff}}(s, t) \leq \frac{l}{k}$



等效电阻距离

引理. $R_{\text{eff}}(a, b) + R_{\text{eff}}(b, c) \geq R_{\text{eff}}(a, c)$

(课后练习)



回顾：随机游走

1. 碰撞时间 (Hitting time): $H_{u,v} := \min\{t \geq 1 \mid X_1 = u \text{ and } X_t = v\}$
and $h_{u,v} = \mathbb{E}[H_{u,v}]$.
2. 返程时间 (Commute time): $C_{u,v} := h_{u,v} + h_{v,u}$.
3. 遍历时间 (Cover time): cover_v 定义为：从 v 出发的随机游走访
问每个节点至少一次需要的期望时间； $\text{cover}_G := \max_v \text{cover}_v$



Commute time

定理. 对任意的节点 s 和 t , $C_{s,t} = 2mR_{\text{eff}}(s,t)$, 其中 $m = |E(G)|$.

证明: 固定节点 t , 记 $h_{u,t}$ 为从点 u 到节点 t 的 hitting time, 满足 $\forall u \neq t$

$$h_{u,t} = 1 + \frac{1}{d_u} \sum_{v \sim u} h_{v,t} \Rightarrow d_u h_{u,t} - \sum_{v \sim u} h_{v,t} = d_u$$

考虑 $\vec{h}_{*,t}$ 这一向量, 它满足

$$\begin{pmatrix} D - A \\ \vdots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_{u,t} \\ \vdots \\ h_{t,t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_u \\ \vdots \\ d_t - 2m \end{pmatrix}$$

(To be cont'd..)



Commute time

定理. 对任意的节点 s 和 t , $C_{s,t} = 2mR_{\text{eff}}(s,t)$, 其中 $m = |E(G)|$.

证明: 固定节点 s , 记 $h_{u,s}$ 为从点 u 到节点 s 的 hitting time, 满足 $\forall u \neq s$

$$h_{u,s} = 1 + \frac{1}{d_u} \sum_{v \sim u} h_{v,s} \Rightarrow d_u h_{u,s} - \sum_{v \sim u} h_{v,s} = d_u$$

考虑 $\vec{h}_{*,s}$ 这一向量, 它满足

$$\begin{pmatrix} & & & & \\ & & & & \\ & & D - A & & \\ & & & & \\ & & & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_{s,s} \\ h_{u,s} \\ h_{t,s} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_s - 2m \\ d_u \\ d_t \end{pmatrix}$$

(To be cont'd..)



Commute time

定理. 对任意的节点 s 和 t , $C_{s,t} = 2mR_{\text{eff}}(s,t)$, 其中 $m = |E(G)|$.

证明(cont'd):

$$L(\vec{h}_{*,t} - \vec{h}_{*,s}) = \begin{pmatrix} d_s \\ d_u \\ \vdots \\ d_t - 2m \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} d_s - 2m \\ d_u \\ \vdots \\ d_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2m \\ 0 \\ \vdots \\ -2m \end{pmatrix}$$

因此 $\frac{L(\vec{h}_{*,t} - \vec{h}_{*,s})}{2m} = b_{s,t}$. 回顾 $L\phi = b_{st}$, 有解, 且解空间是一维的

令 $\phi = \frac{\vec{h}_{*,t} - \vec{h}_{*,s}}{2m}$, 有

$$R_{\text{eff}}(s,t) = \phi(s) - \phi(t) = \frac{h_{s,t} - h_{s,s}}{2m} - \frac{h_{t,t} - h_{t,s}}{2m} = \frac{h_{s,t} + h_{t,s}}{2m} = \frac{C_{s,t}}{2m}$$