Homework #3

截止日期：4 月 15 日 23:59 之前

问题 #1

给定矩阵 $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ 和向量 $\boldsymbol{b} \in \boldsymbol{R}^n$, 最小二乘法可以解决如下问题:

$$\arg\min_{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n} \quad \|A\boldsymbol{x}-\boldsymbol{b}\|_2 .$$

现在考虑如下切比雪夫多项式的参数拟合问题:

> 令 $\boldsymbol{t}(x) = [T_0(x)\ T_1(x)\ T_2(x)\ \cdots\ T_n(x)]^\intercal$, 其中, 对于 $0 \le i \le n$, $T_i(x) = \cos(i \arccos x)$ 是切比雪夫多项式. 现在, 给定 $n+1$ 个点对 $\{(x_i, y_i) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \le i \le n\}$, 请找到 $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^{n+1}$, 使得多项式 $p(x) = \boldsymbol{a}^\intercal \boldsymbol{t}(x)$ 最小化 $\sum_{i=0}^n (p(x_i) - y_i)^2$.

请将该问题翻译为最小二乘法能解决的问题 (具体的, 应该说明如何设置 $A, \boldsymbol{b}$, 以及求解完成之后 $\boldsymbol{x}$ 的含义).

问题 #2

1. 假设矩阵 $A \in \mathbb{R}^{n\times m} (n \le m)$ 的行是线性无关的, 请证明 $AA^\intercal$ 是可逆的, 并找出矩阵 $A^\dagger \in \mathbb{R}^{m\times n}$ 使得 $AA^\dagger = I_n$. （HINT: $A^\dagger$ 的表达式里面可以出现 $(AA^\intercal)^{-1}$）

2. 对于有无穷组解的线性方程组 $Ax = b$, 如果 A 的行是线性无关的，请证明 $x = A^\dagger b$ 是这些解里面 2-范数最小的. （HINT：可以尝试从几何直观中思考，长度什么时候最短）

3. 对于向量 $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ 和整数 $p > 0$, $\boldsymbol{x}$ 的 p-范数定义为 $\|\boldsymbol{x}\|_p \triangleq \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}$.
   请证明 $\lim_{p\to\infty} \|\boldsymbol{x}\|_p = \|\boldsymbol{x}\|_\infty = \max_{1\le i\le n} |x_i|$.
4. 对于向量 $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$, 请证明 $\|\boldsymbol{x}\|_\infty \le \|\boldsymbol{x}\|_2 \le \sqrt{n}\,\|\boldsymbol{x}\|_\infty$.

问题 #3

在这个题目中, 我们考虑快速傅立叶变换 (FFT).

回顾: 对于多项式 $p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$, 快速傅立叶变换选取 $\omega \in \mathbb{C}$ 为 $n+1$ 次单位根, 计算结束之后得到,

$$\forall 0 \le j \le n, \quad p(\omega^j) = \sum_{i=0}^{n} a_i \omega^{ij};$$

快速傅立叶变换的逆变换选取 ω^{-1}, 计算结束之后得到,

$$\forall 0 \le i \le n, \quad a_i = \frac{1}{n+1} \sum_{j=0}^{n} p(\omega^j)\omega^{-ij},$$

其中, 逆变换要成立需要满足 $\sum_{i=0}^n \omega^i = 0$.

快速傅立叶变换 (FFT) 在实现的时候需要处理复数, 这会带来一些困难. 为了处理这个困难, 在这个问题中, 我们将展示如何在模运算的意义下进行快速傅立叶变换. 简单起见, 我们只考虑 mod 5.

1. 首先, 我们来验证一些简单的事实:
   (a) 对于 $z \in \{1, 2, 3, 4\}$, 计算 $z^4 \equiv ?\ (\text{mod } 5)$.
   (b) 计算, 对于 $\omega = 3$,

$$\{\omega^0, \omega^1, \omega^2, \omega^3\} \equiv ?\ (\text{mod } 5)$$
$$\{\omega^0, \omega^2, \omega^4, \omega^6\} \equiv ?\ (\text{mod } 5)$$
$$\{\omega^0, \omega^4, \omega^8, \omega^{12}\} \equiv ?\ (\text{mod } 5)$$

   (c) 对于 $\omega = 3$, 计算 $1 + \omega + \omega^2 + \omega^3 \equiv ?\ (\text{mod } 5)$.

不难发现, $\omega = 3$ 在 (mod 5) 的意义下和 $\omega = i$ 有相似的性质. 利用这些性质, 我们可以实现 (mod 5) 意义下的快速傅立叶变换.

2. 令 $\omega = 3$, 用 FFT 求出多项式 $3x + 2x^2$ 在 $\{1, 3, 4, 2\}$ 的值 $\pmod 5$, 写出递归算法运行的大致过程.

3. 某个多项式在 $\{1, 3, 4, 2\}$ 上求出的值分别是 $\{0, 0, 1, 4\} \pmod 5$, 请通过 FFT 的逆变换求出这个多项式, 写出递归算法运行的大致过程.

提示: FFT 的逆和 FFT 过程几乎一样, 但是需要使用 $\omega^{-1} \equiv 2 \pmod 5$, 而不是 $\omega = 3$. 并且我们需要在执行完算法之后乘上 $4^{-1} \pmod 5$ 进行归一化.

4. 利用 $\pmod 5$ 意义下的 FFT 来计算 $3x + 2x^2$ 和 $3 - x$ 的乘积 $\pmod 5$.

问题 #4

对任意多项式 f, g, 考虑内积

$$\langle f, g \rangle := \int_{-1}^{1} f(x)g(x) \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1 - x^2}},$$

利用该内积, 可以定义范数 $\|f\| := \sqrt{\langle f, f \rangle}$.

现在令 T_n 表示 n 阶切比雪夫多项式. 对于 $d > 1$, 请找出 $a_0, a_1, \cdots, a_{d-1}$ 使得 $\|T_d - (a_0 T_0 + a_1 T_1 + \cdots + a_{d-1} T_{d-1})\|$ 最小.

提示: 切比雪夫多项式关于这个内积正交.