# Homework #1

**截止日期：3 月 4 日 23:59 之前**

## 问题 #1

考虑定义在扩充复平面上的函数

$$f(z) := \frac{az+b}{cz+d}.$$

其中 $a, b, c, d$ 为复数。（扩充复平面是指普通的复平面加入无穷远点构成的集合，即 $\widehat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$。当 $c \neq 0$ 时，定义 $f(\frac{-d}{c}) = \infty$，$f(\infty) = \frac{a}{c}$，当 $c = 0$ 时，定义 $f(\infty) = \infty$）

1. 任意给定 $f(z)$，它可能有几个不同的不动点？

2. 试分析 $f(z) = \frac{4z+1}{z+4}$ 的不动点迭代过程，在初始值为任意实数 $z_0 \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ 的收敛情况。

   提示: 可以证明，当 $f(z)$ 有两个不动点 $\gamma_1, \gamma_2$ 时，存在常数 $k$ 满足以下标准型：
   $$\frac{f(z) - \gamma_1}{f(z) - \gamma_2} = k \cdot \frac{z - \gamma_1}{z - \gamma_2}.$$

## 问题 # 2

假设 $f(x)$ 和 $p(x)$ 是两个一阶可导的 $\mathbb{R}$ 上的函数。

1. 我们想计算函数 $f(x)$ 的根。但是因为计算带来的误差，我们可能实际上算的是另外一个函数 $f(x) + \varepsilon p(x)$ 的根。令 $x^*$ 为函数 $f$ 的根，它满足 $f(x^*) = 0$。如果 $f'(x^*) \neq 0$，那么对于足够小的 $\varepsilon$，存在函数 $x(\varepsilon)$

使得 $f(x(\varepsilon))+\varepsilon p(x(\varepsilon))=0$ 且 $x(0)=x^*$。假设这样的函数 $x(\varepsilon)$ 存在并且是可导的，请证明

$$\left.\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0}=-\frac{p(x^*)}{f'(x^*)}.$$

2. 假设 $f(x)$ 是 Wilkinson 多项式，定义为：

$$f(x):=(x-1)(x-2)(x-3)\cdots(x-20).$$

如果展开这个多项式，我们可以得到 $f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_{20}x^{20}$，其中 $a_0,\cdots,a_{20}$ 是对应次项的系数。如果我们刚好只有 $a_{19}$ 这一项系数有误差，那么，可以令 $p(X):=x^{19}$，并使用 (1) 中的模型来分析最终的误差。根据这里选取的 $f(x),p(x)$，请证明对于任意 $j\in\{1,2,\cdots,20\}=:S$，有：

$$\left.\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0,x^*=j}=-\prod_{k\in S:k\neq j}\frac{j}{j-k}.$$

3. 在 (2) 中分别取 $x^*=1$ 和 $x^*=20$，并对比各自的 $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\varepsilon}$，哪一个对这里的误差更加稳定？

## 问题 #3

假设 $f_0(x):=\frac{1}{1+x}$，$f_1(x):=\frac{1}{2+x}$。我们将会考虑由 $f_0$ 和 $f_1$ 可能生成的所有混合迭代方式。

任意给定一个可数无穷长的二进制串 $\sigma\in\{0,1\}^{\mathbb{N}}$，我们通过 $\sigma$ 的有限前序来指定使用 $f_0$ 和 $f_1$ 的进行混合迭代的方式。任意给定正整数 $T\geq 3$，定义 $g_\sigma^T:=f_{\sigma(T)}\circ f_{\sigma(T-1)}\circ\cdots\circ f_{\sigma(1)}$。

证明存在绝对常数 $C$ 使得对于任意的二进制串 $\sigma\in\{0,1\}^{\mathbb{N}}$，正整数 $T\geq 3$，都满足

$$\forall x_1,x_2\in\mathbb{R}_{\geq 0},\quad \left|g_\sigma^T(x_1)-g_\sigma^T(x_2)\right|\leq\exp(-C\cdot T)\cdot|x_1-x_2|.$$

## 问题 #4

假设函数 $g$ 为二次可导函数，且 $r$ 为 $g(r)=r$ 的一个不动点，满足 $g'(r)=0$, $|g''(r)|<2$，并且 $g''$ 在 $r$ 的一个邻域里连续。试证明由 $g$ 定义的不动点迭代方程 $x_{k+1}=g(x_k)$ 在 $r$ 的一个邻域上二次收敛。