计算方法

刘景铖

计算机软件新技术国家重点实验室
南京大学

补充：Cheeger's Inequality in Markov chains

It is interesting to see how Cheeger's inequality can be used.

When we want to bound $\phi(G)$, say in constructing expander graphs,

we can come up with algebraic constructions and bound λ_2 instead

When we want to bound λ_2, say in bounding the mixing time,

we can analyze combinatorial problems and bound $\phi(G)$ instead

An alternative perspective like this is exactly what makes it so powerful

回顾

上节课: 无向图上的马尔可夫链基本定理

随机游走的混合时间 (mixing time)与谱间隔 (spectral gap)

这节课：电路电阻网络

“等效电阻”距离

随机游走的碰撞时间(Hitting time)和遍历时间 (cover time)

回顾：Random walk on graphs

给定图$G = (V, E)$

图上的随机游走:

- 从一个给定的顶点出发
- 接下来，每一步都从当前顶点，移动到一个均匀随机选取的邻居
- 不断重复

这个随机过程的"长期表现"是怎么样的呢？

1. 重复t步之后，当前顶点是某个顶点u的概率是多少？
2. 是否存在一个极限的随机分布，**随机游走会收敛到它？（稳态）**
3. 多久才会收敛？(混合时间，mixing time)
4. **从点s出发，多久才会到达点t? (hitting time)**
5. **多久才会遍历每个顶点至少一次？(遍历时间，cover time)**

Why hitting time and cover time?

Hitting time: used a lot in designing randomized algorithm

- Finding bipartite matching
  - Use random walk to find an augmenting cycle
  - Interested in the first return time, in expectation
- 2SAT, and more generally in algorithmic Lovász local lemma
  - Basically a random walk over all assignments
  - Interested in the first time of hitting a satisfying assignment, in expectation
  - In discrepancy theory, one way to find a "balanced coloring" is to use random walk

Cover time: imagine you want to explore the graph

Using DFS/BFS, you need time $O(|E| + |V|)$ and space $O(|V|)$

What if we use random walk instead?

Space $= O(\log n)$, expected running time = cover time $\leq O(|V||E|)$

In fact, U. Feige showed that there is an entire spectrum of time-space trade-off:

For every s there is an algorithm using space s and time $\tilde{O}\left(\frac{|V||E|}{s}\right)$ that covers all vertices w.h.p.

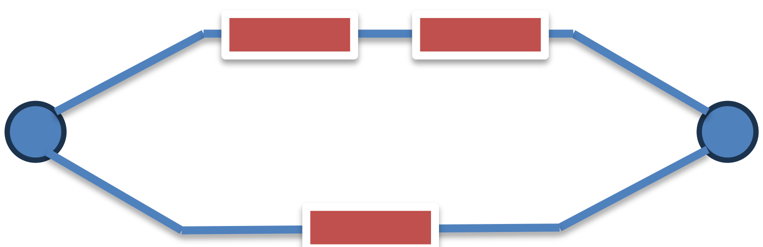
电路网络

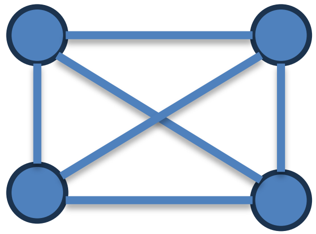
给定一个无向图，每条边上有一个电阻，电阻值为r_e 。

电路网络可以由基尔霍夫定律(Kirchhoff's law)和欧姆定律(Ohm's law):

- 基尔霍夫定律: 所有进入某节点的电流的总和，等于所有离开这节点的电流的总和
- 欧姆定律: 把节点的电压（电势）记为$\phi: V \to \mathbb{R}$，则有$\phi(u) - \phi(v) = i_{uv} r_{uv}$ ，其中i_{uv}是u到v的方向电流（特别地，有$i_{uv} = -i_{vu}$）

- 如何计算电路网络？





Not every graph is series-parallel

电路网络的矩阵表示

给定电阻r_e（或者电导率$w_e = 1/r_e$），如果从节点s注入1A的电流，并且从节点t流出，如何求解/模拟电路网络内部的电流和电压？

更一般地，记b_v**为**（从电路外部）**流入到节点**$v \in V$的方向电流

- $b_v > 0$意味着（从外部）注入电流
- $b_v < 0$意味着（向外部）流出的电流
- 除了源节点(source)和汇出节点(sink)，其它内部节点有$b_v = 0$

翻译一下电流和电压需要遵循的定律:

- **基尔霍夫定律:**

$$\sum_{u:vu\in E} i_{vu} = b_v, \qquad \forall v \in V$$

对于每个节点
内部流出的电流=外部流入的电流

- 欧姆定律:

$$\phi(u) - \phi(v) = i_{uv} r_{uv} \quad \Leftrightarrow \quad i_{uv} = w_{uv}\big(\phi(u) - \phi(v)\big)$$

两相合并可得:

$$b_v = \sum_{u:vu\in E} i_{vu} = \sum_{u:vu\in E} w_{uv}\big(\phi(v) - \phi(u)\big) = \deg_w(v)\,\phi(v) - \sum_{u:vu\in E} w_{uv}\phi(u)$$

其中 $\deg_w(v) = \sum_{u:vu\in E} w_{uv}$**是节点** v**的加权的度数**。特别地如果$w_{uv} = 1$，有$\vec{b} = L\vec{\phi}$

一般而言，这是一个带权的Laplacian

电路网络的矩阵表示

给定电阻r_e（或者电导率$w_e = 1/r_e$），如果从节点s注入1A的电流，并且从节点t流出，如何求解/模拟电路网络内部的电流和电压？

求解$\vec{b} = L\vec{\phi}$！

计算出电压$\vec{\phi}$之后，电流$i_{uv} = w_{uv}\big(\phi(u) - \phi(v)\big)$**可直接接由**欧姆定律**得出**

考虑incidence matrix B，有$\vec{\iota} = WB^{\top}\vec{\phi}$，其中$W$为电导率组成的对角阵

事实上，拉普拉斯矩阵亦可以写成$L = \sum_e w_e b_e b_e^{\top} = BWB^{\top}$

$\vec{b} = L\vec{\phi} = BWB^{\top}\vec{\phi} = B\vec{\iota}$, **基尔霍夫定律, flow conservation**

注解：很多问题与电路网络的联系，正是从这些方程组开始

这些方程组什么时候有解？解是唯一的吗？

Pseudo-inverse of L

注意拉普拉斯矩阵L并不是满秩的， $L\vec{1}=\vec{0}$

所以 $L\vec{\phi}=\vec{b}$不一定有唯一的解

回顾：如果图是连通的，则L的第二小特征值严格大于0；因此L的零空间(nullspace)完全由 $\vec{1}$张成。

<u>**引理**</u>：如果存在向量$\vec{\phi}$ 使得$L\vec{\phi}=\vec{b}$，则$\vec{b}\perp\vec{1}$

证明：假设$\vec{\phi}=\sum_i c_i v_i$，其中$v_1=\frac{1}{\sqrt{n}}\vec{1}$

则$L\vec{\phi}=c_2\lambda_2 v_2+\cdots+c_n\lambda_n v_n$

因此 $L\vec{\phi}\perp\vec{1}$

对于电路网络来说，这也是合理的：外部流入的电流与流出的电流相等

Pseudo-inverse of L

<u>**引理**</u>：如果$\vec{b} \perp \vec{1}$，则存在向量$\vec{\phi}$ 使得$L\vec{\phi} = \vec{b}$

证明：因为$\vec{b} \perp \vec{1}$，因此$\vec{b} = \sum_{i=2}^{n} a_i\, v_i$

考虑$\vec{\phi} = \sum_{i=2}^{n} \frac{a_i}{\lambda_i} v_i$，可以验证$L\vec{\phi} = \vec{b}$

因此$L^{\dagger} := \sum_{i=2}^{n} \frac{1}{\lambda_i} v_i v_i^{\top}$是一个pseudoinverse(伪逆)：

- 任意向量 $\vec{b} \perp \vec{1}$都被映射到一个唯一的$\vec{\phi}$使得 $L\vec{\phi} = \vec{b}$且 $\vec{\phi} \perp \vec{1}$
- $L\vec{\phi} = \vec{b}$ 全体解集为$\{L^{\dagger}\vec{b} + c\vec{1}: c \in \mathbb{R}\}$, $\overrightarrow{L^{\dagger}b}$的所有“平移”
- 特别地，如果固定一个节点的电压/电势$\phi(v) = 0$，有唯一解

Effective resistance (等效电阻)

节点s和t之间的等效电阻$R_{\mathrm{eff}}(s,t) := \phi(s) - \phi(t)$，其中$\vec{\phi}$ 满足$L\vec{\phi} = \vec{b}$， $\vec{b}$对应于从s到t发送1A电流的向量

相当于把整个图看成一个等效的大电阻的时候，对应的等效的电阻

引理： $R_{\mathrm{eff}}(s,t) = b_{st}^{\top} L^{\ddagger} b_{st}$，其中向量$b_{st} \in \mathbb{R}^n$满足$b_{st}(s) = 1, b_{st}(t) = -1$，并且其它位置都为0

Energy (电势能)

$$\mathcal{E}(\vec{i}) := \sum_{e\in E} i_e^2 \cdot r_e$$

直观上，可以把整个网络看成从s到t的一个大电阻

定理. $\mathcal{E}(\vec{i}) = R_{\text{eff}}(s,t)$, 其中$i$是从$s$到$t$的单位电流.

证明： $\sum_{e\in E} i_e^2 \cdot r_e = \sum_e \frac{\left(\phi(u)-\phi(v)\right)^2}{r_e} = \phi^\top L\phi$,

其中ϕ满足$L\phi = b_{st}$，因此$\phi = L^\dagger b_{st}$

进而有$\mathcal{E}(\vec{i}) = b_{st}^\top L^\dagger b_{st} = R_{\text{eff}}(s,t)$

Thompson's Principle

<u>定理</u>. $R_{\text{eff}}(s,t) \leq \mathcal{E}(\vec{g})$，其中$\vec{g}$是任意$s$-$t$流.

为简单起见，这里只考虑$r_e = 1, \forall r_e$的情形

证明(sketch)：考虑$\min \mathcal{E}(\vec{g}) = \min \sum_{e\in E} g_e^2$, s.t. $B\vec{g} = b_{st}$

Optimality (KKT) requires that $\exists \phi \in \mathbb{R}^n$ $s.t. B^\top \phi = \vec{g}$

即流 $\vec{g}$是由某个电压向量 ϕ通过Ohm's law确定的

因此 $\vec{g}$是电流

结论：单位s-t电流最小化所有能量

Thompson's Principle（另一个证明）

定理. $R_{\mathrm{eff}}(s,t) \le \mathcal{E}(\vec{g})$，其中$\vec{g}$是任意$s$-$t$流.
为简单起见，这里只考虑$r_e = 1, \forall r_e$的情形
证明：设$\vec{g} = i + c$，其中i为s-t的单位电流
首先注意到，$\vec{g}$和i满足同样的基尔霍夫定律，因此它们的差满足

$$\sum_{u:vu\in E} c_{vu} = 0, \qquad \forall v \in V$$

另一方面

$$\mathcal{E}(\vec{g}) = \sum_{e\in E} g_e^2 = \sum_{e\in E} (i_e + c_e)^2 = \sum_{e\in E} i_e^2 + \sum_{e\in E} c_e^2 + 2\sum_{e\in E} i_e c_e$$

接下来只需要证明$\sum_{e\in E} i_e c_e = 0$，便有$\mathcal{E}(\vec{g}) \ge \sum_{e\in E} i_e^2 = R_{\mathrm{eff}}(s,t)$

由于i为s-t的单位电流，它还满足欧姆定律: $i_{uv} = \phi(u) - \phi(v)$
因此

$$\sum_{uv\in E} c_{uv}\big(\phi(u) - \phi(v)\big) = \sum_{uv\in E} c_{uv}\phi(u) + c_{vu}\phi(v) = \sum_{v}\sum_{u:\, uv\in E} c_{uv}\phi(u) = 0$$

单调性

定理. 如果$\overrightarrow{r'} \geq \vec{r}$, 则有$R_{\mathrm{eff},\overrightarrow{r'}}(s,t) \geq R_{\mathrm{eff},\vec{r}}(s,t)$.

证明：设$\vec{\iota}$为电阻值$\vec{r}$的网络中从s到t的单位电流，

$\overrightarrow{i'}$为电阻值$\overrightarrow{r'}$的网络中从s到t的单位电流

$$R_{\mathrm{eff},\vec{r}}(s,t) = \mathcal{E}_{\vec{r}}(\vec{\iota}) \leq \mathcal{E}_{\vec{r}}\left(\overrightarrow{i'}\right) \leq \mathcal{E}_{\overrightarrow{r'}}\left(\overrightarrow{i'}\right) = R_{\mathrm{eff},\overrightarrow{r'}}(s,t)$$

这里第一个不等号使用了Thompson’s principle;

第二个不等号使用了$\overrightarrow{r'} \geq \vec{r}$以及 $\mathcal{E}_{\vec{r}}(\vec{\iota}) \coloneqq \sum_{e\in E} i_e^2 \cdot r_e$

Edge-disjoint paths

例子：如果s到t之间有k 条“边不相交”的路径，每个路径长度最多为l, 那么$R_{\text{eff}}(s,t) \leq \frac{l}{k}$

等效电阻距离

引理. $R_{\text{eff}}(a,b)+R_{\text{eff}}(b,c)\geq R_{\text{eff}}(a,c)$

（课后练习）

回顾：随机游走

1. 碰撞时间 (Hitting time): $H_{u,v} := \min\{t \geq 1 \mid X_1 = u \; and \; X_t = v\}$ and $h_{u,v} = \mathbb{E}[H_{u,v}]$.

2. 返程时间 (Commute time): $C_{u,v} := h_{u,v} + h_{v,u}$.

3. 遍历时间 (Cover time): cover_v 定义为：从v出发的随机游走访问每个节点至少一次需要的期望时间；$\mathrm{cover}_G := \max_{v} \mathrm{cover}_v$

Commute time

定理. 对任意的节点s 和 t，$C_{s,t} = 2mR_{\text{eff}}(s,t)$，其中$m = |E(G)|$.
证明：固定节点 t ，记$h_{u,t}$为从点 u节点 t的hitting time，满足$\forall u \neq t$

$$h_{u,t} = 1 + \frac{1}{d_u}\sum_{v\sim u} h_{v,t} \Rightarrow d_u h_{u,t} - \sum_{v\sim u} h_{v,t} = d_u$$

考虑$\overrightarrow{h_{*,t}}$这一向量，它满足

$$\begin{pmatrix} & & \\ & D-A & \\ & & \end{pmatrix}\begin{pmatrix} h_{u,t} \\ \\ h_{t,t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_u \\ \\ d_t - 2m \end{pmatrix}$$

(To be cont'd..)

Commute time

定理. 对任意的节点s 和 t，$C_{s,t} = 2mR_{\text{eff}}(s,t)$，其中$m = |E(G)|$.

证明：固定节点 s，记$h_{u,s}$为从点 u节点 s的hitting time，满足$\forall u \neq s$

$$h_{u,s} = 1 + \frac{1}{d_u} \sum_{v \sim u} h_{v,s} \Rightarrow d_u h_{u,s} - \sum_{v \sim u} h_{v,s} = d_u$$

考虑$\overrightarrow{h_{*,s}}$这一向量，它满足

$$\begin{pmatrix} & & \\ & D - A & \\ & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_{s,s} \\ h_{u,s} \\ \\ h_{t,s} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_s - 2m \\ d_u \\ \\ d_t \end{pmatrix}$$

(To be cont'd..)

Commute time

定理. 对任意的节点s 和 t，$C_{s,t}=2mR_{\mathrm{eff}}(s,t)$，其中$m=|E(G)|$.

证明(cont'd)：

$$L(\overrightarrow{h_{*,t}}-\overrightarrow{h_{*,s}})=\begin{pmatrix} d_s \\ d_u \\ \vdots \\ d_t-2m \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} d_s-2m \\ d_u \\ \vdots \\ d_t \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2m \\ 0 \\ \vdots \\ -2m \end{pmatrix}$$

因此$\frac{L(\overrightarrow{h_{*,t}}-\overrightarrow{h_{*,s}})}{2m}=b_{s,t}$。回顾$L\phi=b_{st}$，有解，且解空间是一维的

令$\phi=\frac{\overrightarrow{h_{*,t}}-\overrightarrow{h_{*,s}}}{2m}$，有

$$R_{\mathrm{eff}}(s,t)=\phi(s)-\phi(t)=\frac{h_{s,t}-h_{s,s}}{2m}-\frac{h_{t,t}-h_{t,s}}{2m}=\frac{h_{s,t}+h_{t,s}}{2m}=\frac{C_{s,t}}{2m}$$

Cover time

<u>推论</u>. $C_{u,v} \leq 2m$，对于任意的$uv \in E$成立.

<u>定理</u>. 连通图的遍历时间最多为$2m(n-1)$.

Approximating Cover Time by Resistance Diameter

Theorem. Let $R(G) \coloneqq \max_{u,v} R_{\text{eff}}(u,v)$ be the resistance diameter. Then,

$$m \cdot R(G) \ \leq \ \text{cover}(G) \leq \ 2e^3 m \cdot R(G) \cdot \ln n + n$$

Proof: Firstly,

$$\text{cover}(G) \geq \max\{h_{uv}, h_{vu}\} \geq \frac{C_{uv}}{2} = mR_{uv}\ ,$$

which is the lowerbound.

For the upperbound, notice that the maximum commute time from any vertex is at most $2mR(G)$

If the random walk is run for $2e^3 m \cdot R(G)$, by Markov's inequality, the probability that a vertex is not visited is at most $1/e^3$

If we repeat this $\ln n$ times, the probability that a vertex is not visited is at most $1/n^3$

By a union bound, the probability that there exists a vertex not visited is at most $1/n^2$

In such cases, we can pay for another pessimistic cover time of n^3

Combined, we have $\text{cover}(G) \leq \ 2e^3 m \cdot R(G) \cdot \ln n + \frac{1}{n^2} n^3$

Graph Connectivity (选讲)

Theorem. There is an $O(n^3)$ time algorithm to solve s-t connectivity using only $O(\log n)$ space
Using random walk, the space requirement is $O(\log n)$ and expected running time is $O(|V||E|) = O(n^3)$

You may wonder, is randomness necessary for checking graph connectivity in log-space?
Definition. A sequence σ is (d, n)-universal if for every labeled connected d-regular graphs and every starting vertex s, the walk defined by σ started from s covers every vertices

Theorem. There exists (d, n)-universal sequence of length $O(n^3 d^2 \log nd)$ for undirected graphs
HINT: Cover time is at most $O(n^2 d)$ for d-regular graphs

Reingold's Theorem For undirected graphs, one can explicitly construct such a universal sequence in log-space

It is an open problem to derandomize log-space connectivity
Though likely not through "directed" universal sequences