

Homework #6

截止日期: 5 月 20 日 23:59 之前

问题 #1 (Hall's drawing)

(1) 考虑把图画在一条线上, 我们使用非零单位向量 $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ 表示一种画法: x_i 代表点 i 画在 $\mathbb{R}$ 上的位置。我们的目标是最小化 $\mathbf{x}^\top L \mathbf{x} = \sum_{ij \in E} (x_i - x_j)^2$, 其中 L 是图的 Laplacian 矩阵; 注意到 $\mathbf{x} + \mathbf{1}$ 是等价于 $\mathbf{x}$ 的 (仅仅是做了一个平移, $\mathbf{1}$ 是全 1 向量), 因此不妨考虑 $\langle \mathbf{x}, \mathbf{1} \rangle = 0$ 的答案。请用 L 的特征向量写出这样的 $\mathbf{x}$ 。

(2) 如果想把图画在平面上, 假设我们使用非零单位向量 $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ 来表示一种画法: (x_i, y_i) 代表点 i 画在平面 $\mathbb{R}^2$ 上的位置。我们的目标是最小化一个类似的 2-范数: $\sum_{ij \in E} \|(x_i, y_i) - (x_j, y_j)\|_2^2$; 类似地, 不失一般性地可以假设 $\langle \mathbf{1}, \mathbf{x} \rangle = 0$ 和 $\langle \mathbf{1}, \mathbf{y} \rangle = 0$ 。请用 L 的特征向量写出这样的 $\mathbf{x}$ 和 $\mathbf{y}$ 。如果额外地要求 $\mathbf{x}$ 与 $\mathbf{y}$ 是正交的话, 你的答案会有什么变化?

问题 #2

设 A 是一个无向图的邻接矩阵, α_1 是它的最大特征值。

1. 我们在课上证明了 $\alpha_1 \leq d_{\max}$ 。你能否证明 $\alpha_1 \geq d_{\text{avg}}$? 这里 $d_{\text{avg}} := \frac{2|E|}{|V|}$ 表示图的平均度数。
2. 图的色数 (chromatic number) $\chi(G)$, 是给所有顶点着色, 使得任意两个相邻的顶点颜色不同的所有着色方案中, 所需的最小颜色数。证明 $\chi(G) \leq \lfloor \alpha_1 \rfloor + 1$ 。你能否设计一个算法来产生这样的着色方案?

问题 #3

对 n 个顶点的无向完全图上每个顶点加上一个自环，记为图 G 。注意此时每个顶点的度数均为 n 。回顾拉普拉斯矩阵的定义为 $L = D - A$ 。其中 D 为对角线上是度数的矩阵， A 为邻接矩阵。

1. 请写出 G 上随机游走的转移矩阵 P ，以及 P 的所有特征值和特征向量。
2. 请写出随机游走在 G 上的稳态分布。
3. 试求随机游走在 G 上的混合时间 (mixing time)。

问题 # 4

对任意给定的一个 n 个顶点的无向图 G ，考虑其拉普拉斯矩阵 $L = D - A$ 。其中 D 为对角线上是度数的矩阵， A 为邻接矩阵。

1. 对于任意给定的 k 个两两互不相同的、非零的实数 λ_i ，设多项式 p 满足

$$\forall i, 1 \leq i \leq k, \lambda_i p(\lambda_i) = 1.$$

请证明：次数最多为 $k - 1$ 次的多项式中有且只有一个满足条件的 p 。

2. 假设拉普拉斯矩阵 L 有 k 个两两互不相同的、非零的特征值。请证明：存在次数最多为 $k - 1$ 次的多项式 p 使得 $p(L)$ 是 L 的伪逆 (pseudo-inverse)。换言之， $\forall \vec{x} \in \mathbb{R}^n, \vec{x} \in (\text{Ker}(L))^\perp$ (即满足 $\vec{x}$ 与任意满足 $L\vec{v} = 0$ 的向量 $\vec{v}$ 正交)，都有 $Lp(L)\vec{x} = \vec{x}$ 。（提示：研究矩阵 $Lp(L)$ 的特征值）
3. 回顾 L 的第二小特征值 $\lambda_2 = 0$ 当且仅当图 G 是不连通的。假设 $\lambda_2 = 0$ 。试设计一个算法，它的输入是 λ_2 对应的特征向量 v_2 ，输出是 G 的两个互不连通的顶点集 V_1, V_2 。