Homework #6

截止日期：5 月 28 日 23:59 之前

问题 #1 (Hall's drawing)

(1) 考虑把图画在一条线上，我们使用非零向量 $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$, $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$ 表示一种画法：x_i 代表点 i 画在 $\mathbb{R}$ 上的位置。我们的目标是最小化 $\boldsymbol{x}^\top L\boldsymbol{x} = \sum_{ij\in E}(x_i - x_j)^2$, 其中 L 是图的 Laplacian 矩阵；注意到 $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{1}$ 是等价于 $\boldsymbol{x}$ 的（仅仅是做了一个平移, $\boldsymbol{1}$ 是全 1 向量），因此不妨考虑 $\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{1}\rangle = 0$ 的答案。请用 L 的特征向量写出这样的 $\boldsymbol{x}$。

(2) 如果想把图画在平面上，假设我们使用非零向量 $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$ 来表示一种画法：(x_i, y_i) 代表点 i 画在平面 $\mathbb{R}^2$ 上的位置。我们的目标是最小化一个类似的 2-范数：$\sum_{ij\in E}\left\|(x_i, y_i) - (x_j, y_j)\right\|_2^2$；类似地，不失一般性地可以假设 $\langle \boldsymbol{1}, \boldsymbol{x}\rangle = 0$ 和 $\langle \boldsymbol{1}, \boldsymbol{y}\rangle = 0$. 请用 L 的特征向量写出这样的 $\boldsymbol{x}$ 和 $\boldsymbol{y}$。如果额外地要求 $\boldsymbol{x}$ 与 $\boldsymbol{y}$ 是正交的话，你的答案会有什么变化?

问题 #2

1. 证明 conductance $\phi(S)$ 可以被解释为 $\mathbf{Pr}\left[X_1 \notin S | X_0 \sim \pi_S\right]$, 即从 π 限制在 S 上进行抽样得到的 X_0 开始的随机游走在一步中逃离 S 的概率.
2. 请证明 $\mathbf{Pr}\left[X_t \in S | X_0 \sim \pi_S\right] \geq (1-\phi(S))^t$.

问题 #3

对 n 个顶点的无向完全图上每个顶点加上一个自环，记为图 G。注意此时每个顶点的度数均为 n。回顾拉普拉斯矩阵的定义为 $L = D - A$。其中

D 为对角线上是度数的矩阵，A 为邻接矩阵。

1. 请写出 G 上随机游走的转移矩阵 P，以及 P 的所有特征值和特征向量。
2. 请写出随机游走在 G 上的稳态分布。
3. 试求随机游走在 G 上的混合时间 (mixing time)。

问题 # 4

对任意给定的一个 n 个顶点的无向图 G，考虑其拉普拉斯矩阵 $L = D - A$。其中 D 为对角线上是度数的矩阵，A 为邻接矩阵。

1. 对于任意给定的 k 个两两互不相同的、非零的实数 λ_i，设多项式 p 满足
$$\forall i, 1 \leq i \leq k, \lambda_i p(\lambda_i) = 1.$$
请证明：次数最多为 $k-1$ 次的多项式中有且只有一个满足条件的 p.
2. 假设拉普拉斯矩阵 L 的有 k 个两两互不相同的、非零的特征值。请证明：存在次数最多为 $k-1$ 次的多项式 p 使得 $p(L)$ 是 L 的伪逆（pseudo-inverse）。换言之，$\forall \vec{x} \in \mathbb{R}^n, \vec{x} \perp \vec{1}$，都有 $Lp(L)\vec{x} = \vec{x}$.（提示：研究矩阵 $Lp(L)$ 的特征值）
3. 回顾 L 的第二小特征值 $\lambda_2 = 0$ 当且仅当图 G 是不连通的。假设 $\lambda_2 = 0$。试设计一个算法，它的输入是 λ_2 对应的特征向量 v_2，输出是 G 的两个互不连通的顶点集 V_1, V_2。