Homework #6

截止日期：6 月 3 日 23:59 之前

问题 #1 (Hall's drawing)

(1) 考虑把图画在一条线上，我们使用非零单位向量 $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$, $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$ 表示一种画法：x_i 代表点 i 画在 $\mathbb{R}$ 上的位置。我们的目标是最小化 $\boldsymbol{x}^\top L\boldsymbol{x} = \sum_{ij\in E}(x_i - x_j)^2$, 其中 L 是图的 Laplacian 矩阵；注意到 $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{1}$ 是等价于 $\boldsymbol{x}$ 的（仅仅是做了一个平移, $\boldsymbol{1}$ 是全 1 向量），因此不妨考虑 $\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{1}\rangle = 0$ 的答案。请用 L 的特征向量写出这样的 $\boldsymbol{x}$。

注意到由 Courant-Fischer 定理:

$$\min_{x\perp 1} \frac{x^\top Lx}{x^\top x} = \lambda_2,$$

其中 λ_2 是 L 第二小的特征值, 最优解为 x_2, 为 λ_2 对应的特征向量.

(2) 如果想把图画在平面上，假设我们使用非零单位向量 $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$ 来表示一种画法：(x_i, y_i) 代表点 i 画在平面 $\mathbb{R}^2$ 上的位置。我们的目标是最小化一个类似的 2-范数：$\sum_{ij\in E}\left\|(x_i, y_i) - (x_j, y_j)\right\|_2^2$；类似地，不失一般性地可以假设 $\langle \boldsymbol{1}, \boldsymbol{x}\rangle = 0$ 和 $\langle \boldsymbol{1}, \boldsymbol{y}\rangle = 0$. 请用 L 的特征向量写出这样的 $\boldsymbol{x}$ 和 $\boldsymbol{y}$。如果额外地要求 $\boldsymbol{x}$ 与 $\boldsymbol{y}$ 是正交的话，你的答案会有什么变化?

注意到

$$\begin{aligned}\sum_{ij\in E}\left\|(x_i, y_i) - (x_j, y_j)\right\|_2^2 &= \sum_{ij\in E}(x_i - x_j)^2 + \sum_{ij\in E}(y_i - y_j)^2 \\ &= x^\top Lx + y^\top Ly.\end{aligned}$$

剩下部分和问题 #3.(1) 类似.

问题 #2

设 A 是一个无向图的邻接矩阵，α_1 是它的最大特征值。

1. 我们在课上证明了 $\alpha_1 \leq d_{\max}$。你能否证明 $\alpha_1 \geq d_{\text{avg}}$? 这里 $d_{\text{avg}} := \frac{2|E|}{|V|}$ 表示图的平均度数。

   根据 Courant-Fischer 定理，有

   $$\alpha_1 = \max_f \frac{f^\top A f}{f^\top f} \geq \frac{\mathbf{1}^\top A \mathbf{1}}{\mathbf{1}^\top \mathbf{1}} = \frac{2|E|}{|V|}.$$

   其中 $\mathbf{1}$ 表示全 1 向量.

2. 图的色数 (chromatic number) $\chi(G)$ ，是给所有顶点着色，使得任意两个相邻的顶点颜色不同的所有着色方案中，所需的最小颜色数。证明 $\chi(G) \leq \lfloor \alpha_1 \rfloor + 1$。你能否设计一个算法来产生这样的着色方案?

   考虑一个递归的染色算法 $F(G)$:

   (a) 如果 $G = \varnothing$, 直接返回;

   (b) 选出图 G 中度数最小的点 v;

   (c) 调用 $F(G-v)$ 给图 $G-v$ 染色;

   (d) 从 $\lfloor \alpha_1 \rfloor + 1$ 种颜色中任选一种和 v 的邻居不一样的颜色给 v.

   不难发现，要说明这个算法能成功返回一个染色，只要证明每次第 (d) 步必定能够从 $\lfloor \alpha \rfloor_1 + 1$ 种颜色中选到一个和 v 的邻居不同的颜色。要说明这一点，我们只要说明 $\deg_G(v) \leq \lfloor \alpha_1 \rfloor$ 即可。

   根据鸽笼原理，一定存在点 u 使得 u 的度数小于等于平均度数，即，

   $$\deg_G(u) \leq \frac{2|E|}{|V|} \leq \alpha_1.$$

   因为 v 是度数最小的点，所以有 $\deg_G(v) \leq \alpha_1$, 因为 $\deg_G(v)$ 一定是整数，所以 $\deg_G(v) \leq \lfloor \alpha_1 \rfloor$.

   最后只需要注意到 $\alpha_1(A_{G-v}) \leq \alpha_1(A_G)$, 其中 A_{G-v}, A_G 分别是 $G-v$ 和 G 的邻接矩阵。所以 F 也能正确的给出 $G-v$ 的染色 (以此类推可以归纳的证明 F 可以对 G 的任意子图给出正确的染色)。

注：$\alpha_1(A_{G-v}) \le \alpha_1(A_G)$ 可以用 Courant-Fischer 定理看出来：对任意 $f : V \setminus \{v\} \to \mathbb{R}$, 我们可以构造另外一个向量 $g : V \to \mathbb{R}$, 保证 $g(v) = 0$ 并使得 $g(u) = f(u), \forall u \neq v$. 这样就有

$$\lambda_{\max}(A_{G-v}) = \max_{f \in \mathbb{R}^{V \setminus \{v\}}} \frac{f^\top A_{G-v} f}{f^\top f} = \max_{f \in \mathbb{R}^{V \setminus \{v\}}} \frac{g^\top A_G g}{g^\top g} \le \max_{g \in \mathbb{R}^V} \frac{g^\top A_G g}{g^\top g} = \lambda_{\max}(A_G).$$

问题 #3

对 n 个顶点的无向完全图上每个顶点加上一个自环，记为图 G。注意此时每个顶点的度数均为 n。回顾拉普拉斯矩阵的定义为 $L = D - A$。其中 D 为对角线上是度数的矩阵，A 为邻接矩阵。

1. 请写出 G 上随机游走的转移矩阵 P，以及 P 的所有特征值和特征向量。

   $P = \frac{1}{n} A = \frac{1}{n} \mathbf{1}\mathbf{1}^\top$. 所以 P 的特征值可能为 1 或者 0. 其中 1 对应特征向量 $\mathbf{1}$, 0 对应的特征向量为任意垂直于 $\mathbf{1}$ 的特征向量.

2. 请写出随机游走在 G 上的稳态分布。

   设 π 为稳态分布, 则有 $\forall v \in V, \pi(v) = \frac{1}{n}$.

3. 试求随机游走在 G 上的 ε- 混合时间 (mixing time)。

   不难验证, 对于任意的初始分布 ν, 都有 $\nu P = \langle \nu, \mathbf{1} \rangle \cdot \frac{1}{n} \mathbf{1} = \frac{1}{n} \mathbf{1}$. 第一个等号是因为 ν 是一个分布. 所以总是可以一步 mixing.

问题 # 4

对任意给定的一个 n 个顶点的无向图 G，考虑其拉普拉斯矩阵 $L = D - A$。其中 D 为对角线上是度数的矩阵，A 为邻接矩阵。

1. 对于任意给定的 k 个两两互不相同的、非零的实数 λ_i，设多项式 p 满足

   $$\forall i, 1 \le i \le k, \lambda_i p(\lambda_i) = 1.$$

   请证明：次数最多为 $k - 1$ 次的多项式中有且只有一个满足条件的 p.

2. 假设拉普拉斯矩阵 L 有 k 个两两互不相同的、非零的特征值。请证明：存在次数最多为 $k-1$ 次的多项式 p 使得 $p(L)$ 是 L 的伪逆（pseudo-inverse）。换言之，$\forall \vec{x} \in \mathbb{R}^n, \vec{x} \in (\mathrm{Ker}(L))^{\perp}$(即满足 $\vec{x}$ 与任意满足 $L\vec{v}=0$ 的向量 $\vec{v}$ 正交)，都有 $Lp(L)\vec{x}=\vec{x}$.（提示：研究矩阵 $Lp(L)$ 的特征值）

3. 回顾 L 的第二小特征值 $\lambda_2 = 0$ 当且仅当图 G 是不连通的。假设 $\lambda_2 = 0$。试设计一个算法，它的输入是 λ_2 对应的特征向量 $v_2 \perp \vec{1}$，输出是 G 的两个互不连通的顶点集 V_1, V_2。

1. 由拉格朗日插值可知, 存在唯一的 k 次多项式 $P(\lambda)$, 刚好以 $\lambda_i, 1 \le i \le k$ 为零点, 且最高次项系数为 1.

   因为 $\forall i, \lambda_i \neq 0$, 所以 $P(0) \neq 0$.

   所以有唯一的多项式, $-P(\lambda)/P(0)$ 的常数项是 -1, 且有零点 $\forall 1 \le i \le k, \lambda_i$.

   所以, 存在唯一的多项式 $p(\lambda)$ 满足 $\lambda p(\lambda) = 1 - P(\lambda)/P(0)$.

   所以, 多项式 $p(\lambda) = (1 - P(\lambda)/P(0))/\lambda$ 就是我们要的多项式, 且唯一.

2. 令这里的 p 和 (1) 中相同. 下面证明 $\forall \vec{x} \in \mathbb{R}^n$, 都有 $Lp(L)\vec{x} = \vec{x}$.

   因为 L 是实对称矩阵, 所以 L 有谱分解 $L = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i v_i^{\top}$, 且 $\{v_i\}$ 是一组单位正交基.

   不妨令 $\lambda_1 = 0$, 为 $v_1 = \vec{1}$ 对应的特征向量.

   将 $\vec{x}$ 分解到 $\{v_i\}$ 上面, 就有 $\vec{x} = \sum_i a_i v_i$. (因为 $\vec{x} \perp \vec{1}$, 所以 $a_1 = 0$)

于是

$$\begin{aligned}
Lp(L)\vec{x} &= Lp(L)(\sum_{i=1}^{n} a_i v_i) \\
&= \sum_{i=1}^{n} a_i Lp(L) v_i \\
&= \sum_{i=1}^{n} a_i v_i \lambda_i p(\lambda_i) \\
&= \sum_{i=2}^{n} a_i v_i \\
&= \vec{x}.
\end{aligned}$$

其中, 倒数第二个等号是因为 $\lambda_1 = 0$, 最后一个等号是因为 $\vec{x} \perp \vec{1}$.

3. 注意到 $v_2^\top L v_2 = \sum_{ij} A_{ij}(v_2(i) - v_2(j))^2 = 0$, 所以 v_2 在每个连通块中的点上分别相同.

   又因为 $v_2 \neq \vec{0}$ 且 $v_2 \perp \vec{1}$, 所以 v_2 中的项一定有正有负.

   所以算法可以这样设计:

   (a) 将 V_1, V_2 初始化为 $\varnothing$;

   (b) 扫描所有点 v, 如果 $v_2(v) < 0$, 将 v 加入 V_1, 否则将 v 加入 V_2;

   (c) 输出 V_1, V_2.