

Homework #7

截止日期: 6 月 11 日 23:59 之前

问题 #1

对 n 个顶点的无向完全图上每个顶点加上一个自环, 记为图 G 。注意此时每个顶点的度数均为 n 。回顾拉普拉斯矩阵的定义为 $L = D - A$ 。其中 D 为对角线上是度数的矩阵, A 为邻接矩阵。

1. 请列出拉普拉斯矩阵的所有特征值, 和对应的特征向量。
2. 任取图 G 上两个顶点 s 和 t 。请写出 s 与 t 之间的 hitting time 满足的关系式, 并进行求解。

问题 #2

请证明: 无向图上的等效电阻满足三角不等式。即,

$$\forall s, t, w \in V, R_{\text{eff}}(s, t) \leq R_{\text{eff}}(s, w) + R_{\text{eff}}(w, t).$$

问题 #3

假设 G 是连通的无向图。它的拉普拉斯矩阵 L 的有 k 个两两互不相同的、非零的特征值。请证明: 图 G 的直径 (最长的最短路径) 最多为 k 。