

Homework #1

截止日期: 9 月 10 日 23:59 之前

问题 #1

考虑定义在扩充复平面上的函数

$$f(z) := \frac{az + b}{cz + d}.$$

其中 a, b, c, d 为复数。(扩充复平面是指普通的复平面加入无穷远点构成的集合, 即 $\hat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ 。当 $c \neq 0$ 时, 定义 $f(-\frac{d}{c}) = \infty$, $f(\infty) = \frac{a}{c}$, 当 $c = 0$ 时, 定义 $f(\infty) = \infty$)

1. 任意给定 $f(z)$, 它可能有几个不同的不动点?
2. 试分析 $f(z) = \frac{5z+1}{z+5}$ 的不动点迭代过程, 在初始值为任意实数 $z_0 \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ 的收敛情况。

提示: 可以证明, 当 $f(z)$ 有两个不动点 γ_1, γ_2 时, 存在常数 k 满足以下标准型:

$$\frac{f(z) - \gamma_1}{f(z) - \gamma_2} = k \cdot \frac{z - \gamma_1}{z - \gamma_2}.$$

问题 # 2

假设 $f(x)$ 和 $p(x)$ 是两个一阶可导的 $\mathbb{R}$ 上的函数。

1. 我们想计算函数 $f(x)$ 的根。但是因为计算带来的误差, 我们可能实际上算的是另外一个函数 $f(x) + \varepsilon p(x)$ 的根。令 x^* 为函数 f 的根, 它满足 $f(x^*) = 0$ 。如果 $f'(x^*) \neq 0$, 那么对于足够小的 ε , 存在函数 $x(\varepsilon)$

使得 $f(x(\varepsilon)) + \varepsilon p(x(\varepsilon)) = 0$ 且 $x(0) = x^*$ 。假设这样的函数 $x(\varepsilon)$ 存在并且是可导的，请证明

$$\left. \frac{dx}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} = -\frac{p(x^*)}{f'(x^*)}.$$

2. 假设 $f(x)$ 是 Wilkinson 多项式，定义为：

$$f(x) := (x-1)(x-2)(x-3)\cdots(x-20).$$

如果展开这个多项式，我们可以得到 $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_{20}x^{20}$ ，其中 $a_0, \dots, a_{20}$ 是对应次项的系数。如果我们刚好只有 a_{19} 这一项系数有误差，那么，可以令 $p(X) := x^{19}$ ，并使用 (1) 中的模型来分析最终的误差。根据这里选取的 $f(x), p(x)$ ，请证明对于任意 $j \in \{1, 2, \dots, 20\} =: S$ ，有：

$$\left. \frac{dx}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0, x^*=j} = - \prod_{k \in S: k \neq j} \frac{j}{j-k}.$$

3. 在 (2) 中分别取 $x^* = 1$ 和 $x^* = 20$ ，并对比各自的 $\frac{dx}{d\varepsilon}$ ，哪一个对这里的误差更加稳定？

问题 #3

假设 $f_0(x) := \frac{1}{2+x}$ ， $f_1(x) := \frac{1}{3+x}$ 。我们将会考虑由 f_0 和 f_1 可能生成的所有混合迭代方式。

任意给定一个可数无穷长的二进制串 $\sigma \in \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ ，我们通过 σ 的有限前序来指定使用 f_0 和 f_1 的进行混合迭代的方式。任意给定正整数 $T \geq 3$ ，定义 $g_{\sigma}^T := f_{\sigma(T)} \circ f_{\sigma(T-1)} \circ \cdots \circ f_{\sigma(1)}$ 。

证明存在绝对常数 $C > 0$ 使得对于任意的二进制串 $\sigma \in \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ ，正整数 $T \geq 3$ ，都满足

$$\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}_{\geq 0}, \quad |g_{\sigma}^T(x_1) - g_{\sigma}^T(x_2)| \leq \exp(-C \cdot T) \cdot |x_1 - x_2|.$$

问题 #4

假设函数 g 为二次可导函数，且 r 为 $g(r) = r$ 的一个不动点，满足 $g'(r) = 0$ ， $|g''(r)| < 2$ ，并且 g'' 在 r 的一个邻域里连续。试证明由 g 定义的不动点迭代方程 $x_{k+1} = g(x_k)$ 在 r 的一个邻域上二次收敛。