Homework #6

截止日期：6 月 3 日 23:59 之前

问题 #1

设 $G=(V,E)$ 是一个连通无向图，$|V|=n$，每个点 i 的度数为 $d_i>0$。记邻接矩阵为 A，度数矩阵为 D，归一化拉普拉斯矩阵为 $\mathcal{L}=I-D^{-1/2}AD^{-1/2}$。

1. 考虑把图画在一条线上。令 $z\in\mathbb{R}^n$，并要求 $z\perp D^{1/2}\mathbf{1}$ 且 $\|z\|_2=1$。我们希望最小化 $z^\top\mathcal{L}z$。请用 $\mathcal{L}$ 的特征向量写出最优的 z。
2. 令 $x=D^{-1/2}z$。证明此时目标函数 $\frac{z^\top\mathcal{L}z}{\|z\|_2}$ 可以写成 $\frac{\sum_{ij\in E}(x_i-x_j)^2}{\sum_i d_i x_i^2}$ 的形式，并解释条件 $z\perp D^{1/2}\mathbf{1}$ 对 x 意味着什么。
3. 如果想把图画在二维平面上，用两个向量 $z^{(1)},z^{(2)}\in\mathbb{R}^n$ 表示两个坐标，并要求 $z^{(1)},z^{(2)}\perp D^{1/2}\mathbf{1}$，$\|z^{(1)}\|_2=\|z^{(2)}\|_2=1$，且 $z^{(1)}\perp z^{(2)}$。请用 $\mathcal{L}$ 的特征向量表示。

问题 #2

设 A 是一个无向图的邻接矩阵，α_1 是它的最大特征值。

1. 我们在课上证明了 $\alpha_1\le d_{\max}$。你能否证明 $\alpha_1\ge d_{\text{avg}}$? 这里 $d_{\text{avg}}:=\frac{2|E|}{|V|}$ 表示图的平均度数。
2. 图的独立数 (independence number) $\text{ind}(G)$，是所有两两不相邻的顶点集合中最大的大小。证明 $\text{ind}(G)\ge\frac{|V|}{\lfloor\alpha_1\rfloor+1}$。你能否设计一个算法来产生这样的独立集?

问题 #3

设 C_n 是 n 个点的环图。考虑 C_n 上的 lazy random walk，其转移矩阵为 $P = \frac{1}{2}I + \frac{1}{2}D^{-1}A$。由于 C_n 是 2-正则图，因此 $P = \frac{1}{2}I + \frac{1}{4}A$。

提示：令 $\omega = \exp\left(\frac{2\pi i}{n}\right)$ 为一个 n 次单位根，对于 $k = 0, 1, \ldots, n-1$，考虑特征向量 v_k，其中第 j 维 $v_k(j) = \omega^{kj}$，

1. 请写出 P 的所有特征值。
2. 请写出该随机游走的稳态分布。
3. 证明当 n 很大时，该随机游走的第二大特征值满足 $\lambda_2(P) = 1 - \Theta\left(\frac{1}{n^2}\right)$。
4. 使用 spectral gap 给出该随机游走的 ε-混合时间的上界，只需要给出关于 n 和 ε 的数量级即可。

问题 #4

对任意给定的一个 n 个顶点的无向图 G，考虑其拉普拉斯矩阵 $L = D - A$。其中 D 为对角线上是度数的矩阵，A 为邻接矩阵。

假设拉普拉斯矩阵 L 有 k 个两两互不相同的、非零的特征值 $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$。由拉格朗日插值可知，存在唯一的次数最多为 $k-1$ 的多项式 p，使得对任意 $1 \leq i \leq k$，都有 $\lambda_i p(\lambda_i) = 1$。

1. 请证明：$p(L)$ 是 L 的伪逆（pseudo-inverse）。换言之，$\forall \vec{x} \in \mathbb{R}^n$，若 $\vec{x} \in (\ker(L))^\perp$，即 $\vec{x}$ 与任意满足 $L\vec{v} = 0$ 的向量 $\vec{v}$ 正交，则有 $Lp(L)\vec{x} = \vec{x}$。(提示：研究矩阵 $Lp(L)$ 的特征值)
2. 回顾 L 的零特征值重数等于图 G 的连通分量个数。假设我们已知 $\ker(L)$ 的一组基 $u_1, \ldots, u_m$。试设计一个算法，它的输入是 $u_1, \ldots, u_m$，输出图 G 的所有连通分量。