Homework #1

截止日期：3 月 18 日 23:59 之前

问题 #1

考虑定义在扩充复平面上的函数

$$f(z) := \frac{az+b}{cz+d}.$$

其中 a, b, c, d 为复数。（扩充复平面是指普通的复平面加入无穷远点构成的集合，即 $\widehat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$。当 $c \neq 0$ 时，定义 $f(\frac{-d}{c}) = \infty$, $f(\infty) = \frac{a}{c}$，当 $c = 0$ 时，定义 $f(\infty) = \infty$）

1. 任意给定 $f(z)$，它可能有几个不同的不动点？
2. 试分析 $f(z) = \frac{5z+1}{z+5}$ 的不动点迭代过程，在初始值为任意实数 $z_0 \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ 的收敛情况。

   提示: 可以证明，当 $f(z)$ 有两个不动点 γ_1, γ_2 时，存在常数 k 满足以下标准型：
   $$\frac{f(z)-\gamma_1}{f(z)-\gamma_2} = k \cdot \frac{z-\gamma_1}{z-\gamma_2}.$$

问题 # 2

假设 $f(x)$ 和 $p(x)$ 是两个一阶可导的 $\mathbb{R}$ 上的函数。

1. 我们想计算函数 $f(x)$ 的根。但是因为计算带来的误差，我们可能实际上算的是另外一个函数 $f(x) + \varepsilon p(x)$ 的根。令 x^* 为函数 f 的根，它满足 $f(x^*) = 0$。如果 $f'(x^*) \neq 0$, 那么对于足够小的 ε, 存在函数 $x(\varepsilon)$

使得 $f(x(\varepsilon)) + \varepsilon p(x(\varepsilon)) = 0$ 且 $x(0) = x^*$。假设这样的函数 $x(\varepsilon)$ 存在并且是可导的，请证明

$$\left.\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} = -\frac{p(x^*)}{f'(x^*)}.$$

2. 假设 $f(x)$ 是 Wilkinson 多项式，定义为：

$$f(x) := (x-1)(x-2)(x-3)\cdots(x-20).$$

如果展开这个多项式，我们可以得到 $f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_{20}x^{20}$，其中 $a_0, \cdots, a_{20}$ 是对应次项的系数。如果我们刚好只有 a_{19} 这一项系数有误差，那么，可以令 $p(X) := x^{19}$，并使用 (1) 中的模型来分析最终的误差。根据这里选取的 $f(x), p(x)$，请证明对于任意 $j \in \{1, 2, \cdots, 20\} =: S$，有：

$$\left.\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0, x^*=j} = -\prod_{k\in S: k\neq j} \frac{j}{j-k}.$$

3. 在 (2) 中分别取 $x^* = 1$ 和 $x^* = 20$，并对比各自的 $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\varepsilon}$，哪一个对这里的误差更加稳定？

问题 #3

假设 $f_0(x) := \frac{1}{2+x}$，$f_1(x) := \frac{1}{3+x}$。我们将会考虑由 f_0 和 f_1 可能生成的所有混合迭代方式。

任意给定一个可数无穷长的二进制串 $\sigma \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$，我们通过 σ 的有限前序来指定使用 f_0 和 f_1 的进行混合迭代的方式。任意给定正整数 $T \geq 3$，定义 $g_\sigma^T := f_{\sigma(T)} \circ f_{\sigma(T-1)} \circ \cdots \circ f_{\sigma(1)}$。

证明存在绝对常数 $C > 0$ 使得对于任意的二进制串 $\sigma \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$，正整数 $T \geq 3$，都满足

$$\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}_{\geq 0}, \quad \left|g_\sigma^T(x_1) - g_\sigma^T(x_2)\right| \leq \exp(-C \cdot T) \cdot |x_1 - x_2|.$$

问题 #4

假设函数 g 为二次可导函数，且 r 为 $g(r) = r$ 的一个不动点，满足 $g'(r) = 0$, $|g''(r)| < 2$，并且 g'' 在 r 的一个邻域里连续。试证明由 g 定义的不动点迭代方程 $x_{k+1} = g(x_k)$ 在 r 的一个邻域上二次收敛。