

# Homework #5

截止日期：5月6日 23:59 之前

## 问题 #1

对于实数对称矩阵, 请找出奇异值与特征值的关系. 这样的关系对于一般的矩阵成立吗?

## 问题 #2

考慮共轭梯度法解  $Ax = b$  ( $A$  是正定矩阵). 共轭梯度法使用的是  $A$ -norm, 定义为

$$\|x\|_A := \sqrt{x^\top Ax}.$$

1. 考虑共轭梯度法的第一步, 请找出  $x_1 \in \text{span}\{b\}$ , 使得  $\|x_1 - x_*\|_A$  最小.
2. 如果将共轭梯度法中的  $A$ -norm 换成 2-norm, 推导出来的  $x_1$  是什么 (用  $b$  和  $x_*$  表示即可)? 为什么 2-norm 下面的  $x_1$  不好计算而  $A$ -norm 下的  $x_1$  容易计算?

## 问题 #3

证明或证伪, 若一个矩阵的行列式接近于 0 (但是不等于 0), 则它的条件数一定非常大 (即, 矩阵接近于不可逆)。

(HINT: 可以从  $2 \times 2$  的对角矩阵开始研究, 它的行列式和条件数分别是什么? )

## 问题 #4

如果矩阵  $A$  的特征值的绝对值最大的恰有两个, 分别是  $\lambda_1, \lambda_2$ .

1. 如果  $\lambda_1 = \lambda_2$ , 幂迭代 (power method) 能找到某一个最大特征值对应的特征向量么?
2. 如果  $\lambda_1 = -\lambda_2$ , 不妨设  $\lambda_1 > 0$ , 幂迭代能找到  $\lambda_1$  对应的特征向量么?