Homework #5

截止日期：11 月 19 日 23:59 之前

问题 #1

对于实数对称矩阵, 请找出奇异值与特征值的关系. 这样的关系对于一般的矩阵成立吗?

问题 #2

考虑共轭梯度法解 $Ax = b$ (A 是正定矩阵). 共轭梯度法使用的是 A-norm, 定义为

$$\|x\|_A := \sqrt{x^\top Ax}.$$

1. 考虑共轭梯度法的第一步, 请找出 $x_1 \in \mathrm{span}\{b\}$, 使得 $\|x_1 - x_*\|_A$ 最小。
2. 如果将共轭梯度法中的 A-norm 换成 2-norm, 推导出来的 x_1 是什么 (用 b 和 x_* 表示即可)? 为什么 2-norm 下面的 x_1 不好计算而 A-norm 下的 x_1 容易计算?

问题 #3

证明或证伪，若一个矩阵的行列式接近于 0（但是不等于 0），则它的条件数一定非常大（即，矩阵接近于不可逆）。

(HINT: 可以从 2×2 的对角矩阵开始研究，它的行列式和条件数分别是什么？)

问题 #4

如果矩阵 A 的特征值的绝对值最大的恰有两个, 分别是 λ_1, λ_2.

1. 如果 $\lambda_1 = \lambda_2$, 幂迭代 (power method) 能找到某一个最大特征值对应的特征向量么?
2. 如果 $\lambda_1 = -\lambda_2$, 不妨设 $\lambda_1 > 0$, 幂迭代能找到 λ_1 对应的特征向量么?